# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

---

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

**Schäfer, Schlesinger, Schottky**

von

**K. Hensel.**

---

## Band 154.

In vier Heften.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1925.

General
Harr.

# Inhaltsverzeichnis des Bandes 154.


**Artin, E.** und **Hasse, H.,** Über den zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste im Körper $k\zeta$ der $l$-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von $k\zeta$ . . . . . Seite 143

**Brouwer, L. E. J.,** Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie . . — 1

**Disse, A.,** Über die Beziehungen zwischen Logarithmus und Numerus in einem $\mathfrak{p}$-adischen algebraischen Körper . . . . . — 178

**Färber, Alfred,** Über das elliptische Integral . . . . . — 94

**Hasse, Helmut,** Direkter Beweis des Zerlegungs- und Vertauschungssatzes für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper im Falle eines Primteilers $\mathfrak{l}$ des Relativgrades $l$ . . . . . — 20

**Hasse, Helmut,** Über das allgemeine Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste im Körper $k\zeta$ der $l$-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von $k\zeta$ . . — 96

**Hasse, Helmut,** Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern . . . . . — 174

**Hasse, Helmut,** Das allgemeine Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste für beliebige, zu $l$ prime Zahlen in gewissen Oberkörpern des Körpers der $l$-ten Einheitswurzeln . . . . . — 199

**Hasse, Helmut,** Der zweite Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste für beliebige zu $l$ prime Zahlen in gewissen Oberkörpern des Körpers der $l$-ten Einheitswurzeln . . . . . — 215

**Koschmieder, Lothar,** Über die Integration zweier Systeme partieller Differentialgleichungen mittels der hypergeometrischen Reihen zweier Veränderlichen — 42

**König, R.** und **Kraft, M.,** Über Reihenentwicklung analytischer Funktionen . — 164

**Liebmann, Heinrich,** Zur Geometrie der *Laguerre*-Gruppe . . . . . — 15

**v. Ludwig, Bernhard,** Über die erweiterte Umkehrung des *Abel*schen Theorems — 36

**v. Ludwig, Bernhard,** Die natürliche Verallgemeinerung des *Jacobi*schen Umkehrproblems . . . . . — 50

**Müller, F.,** Zur Geometrie der Gruppe aller Berührungstransformationen der Kugeln . . . . . — 131

**v. Neumann, J.,** Eine Axiomatisierung der Mengenlehre . . . . . — 219

**Reidemeister, Kurt,** Eine Kennzeichnung der Kugel nach *W. Blaschke* . . — 8

**Reidemeister, Kurt,** Eine Kennzeichnung der Kugel nach *W. Blaschke* . . — 260

**Roeser, E.,** Ein neuer Zusammenhang zwischen den Trigonometrien der beiden nichteuklidischen Ebenen . . . . . — 149

**Roeser, E.,** Das rechtwinklige Fünfeck der hyperbolischen Ebene und die *Engel-Napier*sche Regel . . . . . — 151

**Schilling, B.,** Eine neue Bestimmung aller Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene . . . . . — 241

**Schönhardt, Erich,** Ein Beitrag zur Theorie der linearen Substitutionsgruppen — 63

**Stammler, Gerhard,** Elementare Betrachtungen über den Aufbau von Zahlverknüpfungen nach Gesetzen . . . . . — 114

**Wahlin, G. E.,** The Number $e$ in $k$ $(p)$ . . . . . — 110

## Ausgabedaten der Hefte von Band 154.

Heft 1 ausgegeben am 26. September 1924
Heft 2 ausgegeben am 16. Januar 1925
Heft 3 ausgegeben am 25. Juni 1925
Heft 4 ausgegeben am 15. Oktober 1925

Grad. R. R. 3

NOV 21 1924

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

**Schäfer, Schlesinger, Schottky**

von

**K. Hensel.**

**Band 154.**

Heft 1.

Ausgegeben den 26. September

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1924

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

## Band 154. Heft 1.

# Inhaltsverzeichnis.


**wer, L. E. J.,** Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie . . Seite 1

**emeister, Kurt,** Eine Kennzeichnung der Kugel nach *W. Blaschke* . . — 8

**mann, Heinrich,** Zur Geometrie der *Laguerre*-Gruppe . . . . . — 15

**e, Hellmut,** Direkter Beweis des Zerlegungs- und Vertauschungssatzes für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper im Falle eines Primteilers $l$ des Relativgrades $l$ . . . . . — 20

**Ludwig, Bernhard,** Über die erweiterte Umkehrung des *Abel*schen Theorems — 36

**hmieder, Lothar,** Über die Integration zweier Systeme partieller Differentialgleichungen mittels der hypergeometrischen Reihen zweier Veränderlichen — 42

**Ludwig, Bernhard,** Die natürliche Verallgemeinerung des *Jacobi*schen Umkehrproblems . . . . . — 50


*An unsere Mitarbeiter!*

*Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.*

*Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.*

lungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

# Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie [1]).

Von *L. E. J. Brouwer* in Amsterdam.

## § 1.

Innerhalb eines bestimmten endlichen „Hauptsystems" können Eigenschaften von Systemen, d. h. Abbildbarkeiten von Systemen auf andere Systeme mit vorgeschriebenen Elementkorrespondenzen, immer *geprüft* (d. h. entweder bewiesen oder ad absurdum geführt) werden; die durch die betreffende Eigenschaft angewiesene Abbildung besitzt nämlich auf jeden Fall nur eine endliche Anzahl von Ausführungsmöglichkeiten, von denen jede für sich unternommen und entweder bis zur Beendigung oder bis zur Hemmung fortgesetzt werden kann. (Hierbei liefert das Prinzip der mathematischen Induktion oft das Mittel, derartige Prüfungen ohne individuelle Betrachtung jedes an der Abbildung beteiligten Elementes bzw. jeder für die Abbildung bestehenden Ausführungsmöglichkeit durchzuführen; demzufolge kann die Prüfung auch für Systeme mit sehr großer Elementenzahl mitunter verhältnismäßig schnell verlaufen.)

Auf Grund der obigen Prüfbarkeit gilt für innerhalb eines bestimmten endlichen Hauptsystems konzipierte Eigenschaften der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, d. h. das Prinzip, daß jede Eigenschaft für jedes System entweder richtig oder unmöglich ist, und insbesondere der *Satz von der Reziprozität der Komplementärspezies*, d. h. das Prinzip, daß für jedes System aus der Unmöglichkeit der Unmöglichkeit einer Eigenschaft die Richtigkeit dieser Eigenschaft folgt.

Wenn z. B. die Vereinigung $\mathfrak{S}(p, q)$ zweier mathematischer Spezies $p$ und $q$ wenigstens 11 Elemente enthält, so folgt hieraus auf Grund des (in diesem Falle als „Disjunktionsprinzip" auftretenden) Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, daß entweder $p$ oder $q$ wenigstens 6 Elemente enthält.

Ebenso: Wenn man in der elementaren Arithmetik bewiesen hat, daß, wenn keine der ganzen positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ durch die Primzahl $c$ teilbar ist,

[1]) Vortrag, in ungefähr gleichlautender Form in niederländischer Sprache auf der flämischen Naturforscherversammlung vom August 1923 und in deutscher Sprache auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vom September 1923 gehalten. Für den niederländischen Text vgl. Wis- en Natuurkundig Tijdschrift, Bd. II, S. 1—7.

auch das Produkt $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ nicht durch $c$ teilbar ist, so folgt hieraus auf Grund des Satzes von der Reziprozität der Komplementärspezies: Wenn das Produkt $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ durch die Primzahl $c$ teilbar ist, so ist wenigstens einer von den Faktoren des Produktes durch $c$ teilbar.

Für innerhalb eines bestimmten endlichen Hauptsystems mit Hilfe des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten hergeleitete Eigenschaften besteht stets Sicherheit, daß man bei Verfügung über einen hinreichenden Zeitraum zu ihrer empirischen Bestätigung gelangen kann.

Nun haben wir die Naturerscheinung, daß zahlreiche Objekte und Mechanismen der Anschauungswelt in bezug auf ausgedehnte Komplexe von Tatsachen und Ereignissen beherrscht werden können, indem man sie als (*eventuell teilweise unbekannte*) endliche diskrete, für bestimmte bekannte Teile an bestimmte Gesetze zeitlicher Verkettung gebundene Systeme betrachtet. Mithin sind auf diese Objekte und Mechanismen in bezug auf die betreffenden Komplexe von Tatsachen und Ereignissen die Gesetze der theoretischen Logik, einschließlich des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, anwendbar, obwohl eine vollständige empirische Bestätigung der gezogenen Schlüsse hier meistens a priori materiell ausgeschlossen ist und bei (juristischen und anderen) zeitlichen Rückschlüssen nicht einmal von einer partiellen Bestätigung die Rede sein kann. Sowohl dieser unvollständigen Verifizierbarkeit der nichtsdestoweniger als unumstößlich richtig betrachteten Schlüsse wie der partiellen Unbekanntheit der repräsentierenden endlichen Systeme und dem Umstande, daß die theoretische Logik häufiger und von mehreren auf diese materiellen, als auf mathematische Objekte angewandt wurde, ist es wahrscheinlich zuzuschreiben, daß man den Gesetzen der theoretischen Logik, einschließlich des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, einen aprioristischen Charakter zugesprochen und die in der Projektion eines endlichen diskreten Systems auf die betreffenden Objekte gelegenen Bedingungen ihrer Anwendbarkeit aus den Augen verloren hat, so daß man sogar dazu kommen konnte, für die völlig primäre und autonome Denkhandlung, welche die Mathematik der endlichen Systeme darstellt, eine tiefere Rechtfertigung in den logischen Gesetzen zu suchen. Dementsprechend führte bei der logischen Behandlung der Anschauungswelt das Auftreten eines Widerspruchs nie zum Zweifel an der Unerschütterlichkeit der logischen Gesetze, sondern nur zur Modifizierung und Ergänzung der auf die Anschauungswelt projizierten mathematischen Fragmente.

Die Konsequenz des den Gesetzen der theoretischen Logik zugeschriebenen aprioristischen Charakters brachte mit sich, daß man bis vor kurzem diese Gesetze, einschließlich des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, auch in der Mathematik der unendlichen Systeme rückhaltlos angewandt hat und sich dabei nicht von der Erwägung hat stören lassen, daß die auf diesem Wege erhaltenen Resultate im allgemeinen weder praktisch noch theoretisch einer empirischen Bestätigung zugänglich sind. Auf dieser Grundlage sind, insbesondere im letzten halben Jahrhundert, ausgedehnte unrichtige Theorien aufgebaut worden. Die Widersprüche, auf die man dabei wiederholt gestoßen ist, haben die *formalistische Kritik* ins Leben gerufen,

eine Kritik, welche in ihrem Wesen darauf hinauskommt, daß die *die mathematische Denkhandlung begleitende Sprache* einer mathematischen Betrachtung unterzogen wird. Einer solchen Betrachtung bieten sich die Gesetze der theoretischen Logik als auf Grundformeln oder Axiome wirkende Operatoren dar, und man stellt sich als Ziel, diese Axiome so umzugestalten, daß die sprachliche Wirkung der genannten Operatoren (die selber ungeändert beibehalten werden) nicht mehr durch die Erscheinung der Sprachfigur des Widerspruchs gestört werden kann. An der Erreichung dieses Ziels braucht keineswegs verzweifelt zu werden [1]), aber damit wird kein mathematischer Wert gewonnen sein: eine durch keinen widerlegenden Widerspruch zu hemmende unrichtige Theorie ist darum nicht weniger unrichtig, so wie eine durch kein reprimierendes Gericht zu hemmende verbrecherische Politik darum nicht weniger verbrecherisch ist.

§ 2.

Von fundamentaler Bedeutung für diese unrichtige „logische", d. h. den Satz vom ausgeschlossenen Dritten benutzende Unendlichkeitsmathematik, insbesondere für die (hauptsächlich aus der Pariser Schule hervorgegangene) *Theorie der reellen Funktionen* sind die beiden folgenden aus dem Satze vom ausgeschlossenen Dritten folgenden Grundeigenschaften gewesen:

1. *die Punkte des Kontinuums bilden eine geordnete Punktspezies* [2]).
2. *jede mathematische Spezies ist entweder endlich oder unendlich* [3]).

Daß die erste Grundeigenschaft unrichtig ist, zeigt folgendes Beispiel: Sei $d_\nu$ die $\nu$-te Ziffer hinter dem Komma der Dezimalbruchentwickelung von $\pi$ und $m = k_n$, wenn es sich in der fortschreitenden Dezimalbruchentwickelung von $\pi$ bei $d_m$ zum $n$-ten Male ereignet, daß der Teil $d_m\, d_{m+1} \ldots d_{m+9}$ dieser Dezimalbruchentwickelung eine Sequenz 0123456789 bildet. Sei weiter $c_\nu = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k_1}$, wenn $\nu \geq k_1$, sonst $c_\nu = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}$, dann definiert die unendliche Reihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ eine reelle Zahl $r$, für welche weder $r = 0$, noch $r > 0$, noch $r < 0$ gilt [4]).

[1]) Unberechtigte Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten auf Eigenschaften wohlkonstruierter mathematischer Systeme kann nämlich nie zu einem Widerspruch führen. Vgl. *L. E. J. Brouwer*, *„De onbetrouwbaarheid der logische principes"* (Tijdschrift voor wijsbegeerte, 2. Jahrgang, 1908), auch aufgenommen in „Wiskunde, waarheid, werkelijkheid" (Groningen, Noordhoff, 1919).

[2]) Wenn nämlich einerseits $a < b$ entweder gilt oder unmöglich ist, andererseits $a > b$ entweder gilt oder unmöglich ist, so gilt entweder $a < b$ oder $a > b$ oder $a = b$.

[3]) Nach dem Satze vom ausgeschlossenen Dritten ist nämlich eine Spezies $s$ entweder endlich, oder sie kann unmöglich endlich sein. Im letzteren Falle besitzt $s$ ein Element $e_1$: denn sonst würde auf Grund des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten $s$ unmöglich ein Element besitzen können, würde mithin endlich sein, was ausgeschlossen ist; weiter besitzt $s$ ein von $e_1$ verschiedenes Element $e_2$: denn sonst würde $s$ unmöglich ein von $e_1$ verschiedenes Element besitzen können, würde mithin endlich sein, was ausgeschlossen ist: in dieser Weise fortfahrend, zeigen wir, daß $s$ eine Fundamentalreihe von verschiedenen Elementen $e_1, e_2, \ldots$ besitzt.

[4]) Selbstverständlich kann man $r$ auch definieren mittels einer beliebigen anderen Eigenschaft $x$, von der für jede bestimmte ganze positive Zahl entweder die Existenz oder die Unmöglichkeit hergeleitet werden kann, während man aber weder eine ganze positive Zahl, die $x$ besitzt, bestimmen noch die Unmöglichkeit von $x$ für alle ganzen positiven Zahlen beweisen kann.

Mit der ersten Grundeigenschaft kommt gleichzeitig die Brauchbarkeit des Integralbegriffes der Pariser Schule, des sogenannten $L$-Integralbegriffes, in Fortfall, weil dieser Integralbegriff an den Begriff der „meßbaren Funktion" gebunden ist, und nach dem obigen nicht einmal eine konstante Funktion den Bedingungen der „Meßbarkeit" genügt. Denn für die Funktion $f(x) = r$, wo $r$ die oben definierte reelle Zahl vorstellt, bilden die $x$-Werte, für welche $f(x) > 0$, keine meßbare Punktspezies [1]).

Daß die zweite Grundeigenschaft unrichtig ist, ersieht man aus dem von der Spezies der oben definierten ganzen positiven Zahlen $k_n$ gelieferten Beispiel.

Mit der zweiten Grundeigenschaft kommt gleichzeitig das „erweiterte Disjunktionsprinzip" in Fortfall, nach welchem, wenn in der Vereinigung $\mathfrak{S}(p, q)$ zweier mathematischer Spezies $p$ und $q$ eine Fundamentalreihe von Elementen enthalten ist, entweder $p$ oder $q$ eine Fundamentalreihe von Elementen enthält, und mit dem erweiterten Disjunktionsprinzip der auf demselben beruhende *Bolzano-Weierstraß*sche Satz, nach welchem jede beschränkte unendliche Punktspezies einen Grenzpunkt besitzt.

Weniger prinzipiell und einfach als die genannten Grundeigenschaften, jedoch ebenso unentbehrlich wie diese für den Aufbau der „logischen" Funktionentheorie, sind die beiden folgenden Theoreme:

1. *Jede in einem geschlossenen Intervall $i$ überall bestimmte stetige Funktion $f(x)$ besitzt ein Maximum, d. h. einen solchen Abszissenwert $x_1$ mit einer solchen Umgebung $\alpha$, daß $f(x_1) \geq f(x)$ für jedes zum Durchschnitte von $\alpha$ und $i$ gehörige $x$.*

Die Unrichtigkeit dieses Satzes geht aus dem folgenden Beispiel hervor: Zählen wir die zwischen 0 und 1 gelegenen irreduziblen Dualbrüche (ausschließlich 0 und 1) in üblicher Weise, d. h. so, daß jeder größere Nenner dem kleineren Nenner folgt, und daß die Brüche von gleichem Nenner nach der Größe des Zählers geordnet sind, durch eine Fundamentalreihe $\delta_1, \delta_2, \ldots$ ab, geben wir $k_1$ dieselbe Bedeutung wie oben, verstehen wir unter $f_n(x)$ die Funktion, welche für $x = \delta_n$ den Wert $2^{-n}$ besitzt, für $x = 0$ sowie für $x = 1$ verschwindet, während sie sowohl zwischen $x = 0$ und $x = \delta_n$ wie zwischen $x = \delta_n$ und $x = 1$ linear verläuft, und setzen wir $g_n(x) = f_n(x)$ für $n = k_1$, sonst $g_n(x) = 0$, so besitzt die im geschlossenen Einheitsintervall überall bestimmte stetige Funktion $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ kein Maximum.

2. (*Heine-Borel*scher Überdeckungssatz.) *Ist jedem Punktkerne der von den Punkten und Grenzpunkten einer beschränkten ganzen Punktspezies $B$ gebildeten Punktspezies $A$ eine Umgebung zugeordnet, so kann man die ganze Punktspezies $A$ mit einer endlichen Anzahl dieser Umgebungen überdecken.*

Die Unrichtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus dem folgenden Beispiel: Wenn für $B$ die oben definierte Zahlenreihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ gewählt wird, während der Zahl $c_\nu$ für $\nu \geq k_1$ das Intervall $(c_\nu - 2^{-k_1-2}, c_\nu + 2^{-k_1-2})$, sonst das Intervall $(c_\nu - 2^{-\nu-2}, c_\nu + 2^{-\nu-2})$, und einem eventuellen Grenzpunkte $e$

[1]) Dagegen findet der $R$-Integralbegriff, d. h. der *Riemann*sche Integralbegriff, ohne weiteres auf $f(x)$ Anwendung.

der Reihe das Intervall $(e - \frac{1}{2}, e + \frac{1}{2})$ zugeordnet ist, so kann $A$ nicht durch eine endliche Anzahl von diesen Umgebungen überdeckt werden [1]).

Wo von der logischen Funktionentheorie nach dem obigen die Grundlagen unhaltbar sind, braucht man sich nicht zu wundern, daß ein großer Teil ihrer Resultate im Lichte einer genaueren Kritik hinfällig wird. Als Beispiel werden wir eines der bekanntesten klassischen Theoreme auf diesem Gebiete, nämlich den Satz, daß eine monotone, überall bestimmte stetige Funktion „fast überall" differenzierbar ist, widerlegen, indem wir eine im geschlossenen Einheitsintervall überall bestimmte monotone stetige, nirgends differenzierbare Funktion konstruieren.

Es sei $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Unter der *zum Intervall* $(x_1, x_2)$ *gehörigen Elementarfunktion* werden wir die im geschlossenen Einheitsintervall überall bestimmte stetige Funktion verstehen, welche für $x_1 \leq x \leq x_2$ gleich

$$\frac{x_2 - x_1}{2\pi} \sin 2\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

und sowohl für $0 \leq x \leq x_1$ wie für $x_2 \leq x \leq 1$ gleich 0 ist, unter $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ die in üblicher Weise abgezählten, zum geschlossenen Einheitsintervall gehörigen Intervalle $\left(\frac{a}{2^n}, \frac{a+2}{2^n}\right)$, wo $a$ und $n$ ganze positive Zahlen bedeuten, und unter $f_n(x)$ die zu $\lambda^{(n)}$ gehörige Elementarfunktion. Weiter geben wir $k_1$ die oben definierte Bedeutung, setzen $g_1(x) = x$ und (für $n \geq 2$) $g_n(x) = f_n(x)$ für $n = k_1$, sonst $g_n(x) = 0$. Alsdann ist die Funktion $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ eine im geschlossenen Einheitsintervall überall bestimmte monotone stetige, nirgends differenzierbare Funktion.

## § 3.

Als Beispiel zur Erläuterung, daß auch ältere, fester konsolidierte Theorien auf dem Gebiete der Unendlichkeitsmathematik durch die Verwerfung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten und demzufolge des *Bolzano-Weierstraß*schen Satzes beeinflußt werden, wenn auch in viel geringerem Maße als die Theorie der reellen Funktionen, wählen wir den Begriff der Konvergenz unendlicher Reihen.

Nennen wir eine unendliche Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ mit reellen Gliedern, für welche die Summe der ersten $n$ Glieder mit $s_n$ bezeichnet wird, *non-oszillierend*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des gleichzeitigen Bestehens feststeht von einer unendlichen Reihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ und einer unendlichen Reihe positiver ganzer Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots$, so daß

$$|s_{n_\nu + m_\nu} - s_{n_\nu}| > \varepsilon \text{ für jedes } \nu,$$

so ist eine solche non-oszillierende Reihe nach der klassischen Theorie auf Grund des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten:

[1]) Auch für abgeschlossene beschränkte ganze Punktspezies $A$ trifft der Satz nicht zu. Gegenbeispiel: Man wähle für $A$ eine solche Spezies von Abszissen $(-2)^{-\nu}$, daß eine Abszisse $(-2)^{-\nu}$ dann und nur dann zu $A$ gehört, wenn eine der obigen Charakterisierung genügende natürliche Zahl $k_1$ bekannt und $\nu$ eine natürliche Zahl $\leq k_1$ ist. Sodann ordne man jeder eventuell zu $A$ gehörigen Abszisse dasselbe Intervall zu, wie oben im Text.

1. *negativ-konvergent*, d. h. es existiert eine reelle Zahl $s$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des Bestehens feststeht von einer unendlichen Reihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$, so daß

$$|s - s_{n_\nu}| > \varepsilon \text{ für jedes } \nu;$$

2. *beschränkt*, d. h. es existieren zwei solche reelle Zahlen $g_1$ und $g_2$, daß

$$g_1 < s_n < g_2 \text{ für jedes } n;$$

3. *positiv-konvergent*, d. h. es existiert eine reelle Zahl $s$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche ganze positive Zahl $n_\varepsilon$ besteht, daß

$$|s - s_n| < \varepsilon \text{ für jedes } n > n_\varepsilon.$$

Betrachten wir nun aber die folgenden fünf non-oszillierenden Reihen (wobei $k_1$ wieder die oben definierte Bedeutung besitzt):

a) $u_n = \frac{1}{2^n}$ für jedes $n$,

b) $u_n = 2 + \frac{1}{2^n}$ für $n = k_1$; $u_n = -2 + \frac{1}{2^n}$ für $n = k_1 + 1$; sonst $u_n = \frac{1}{2^n}$,

c) $u_n = n + \frac{1}{2^n}$ für $n = k_1$; $u_n = -n + \frac{1}{2^n}$ für $n = k_1 + 1$; sonst $u_n = \frac{1}{2^n}$,

d) $u_n = 1$ für $n = k_1$; sonst $u_n = \frac{1}{2^n}$,

e) $u_n = n$ für $n = k_1$; sonst $u_n = \frac{1}{2^n}$,

dann stellt sich die Reihe a) als positiv-konvergent, mithin auch negativ-konvergent und beschränkt heraus; die Reihe b) als negativ-konvergent und beschränkt, aber nicht positiv-konvergent; die Reihe c) als negativ-konvergent, aber nicht beschränkt, mithin auch nicht positiv-konvergent; die Reihe d) als beschränkt, aber nicht negativ-konvergent, mithin auch nicht positiv-konvergent; die Reihe e) endlich als weder beschränkt, noch negativ-konvergent, noch positiv-konvergent.

Zur Erläuterung der Konsequenzen der obigen Unterscheidung wollen wir das *Kummer*sche Konvergenzkriterium betrachten, das wie folgt lautet: „Wenn $B_1, B_2, \ldots$ positive Zahlen sind, und wenn für die unendliche Reihe mit positiven Gliedern $r = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$

$$\lim \left\{ B_n \frac{u_n}{u_n + 1} - B_{n+1} \right\} > 0$$

ist, dann ist $r$ positiv-konvergent".

Der Beweis dieses Konvergenzkriteriums wird gewöhnlich wie folgt geführt: Man wählt auf Grund des Vorausgesetzten $M$ und $k$ so, daß für $n \geq M$

$$B_n \frac{u_n}{u_n + 1} - B_{n+1} > k,$$

$$B_n u_n - B_{n+1} u_{n+1} > k u_{n+1},$$

$$B_n u_n - B_{n+p} u_{n+p} > k(u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}),$$

$$u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} < \frac{B_n u_n}{k},$$

woraus für die Reihe $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots (n \geq M)$, mithin auch für die Reihe $r = u_1 + u_2 + \cdots$ die *Beschränktheit* folgt. Auf Grund dieser Beschränktheit wird dann die Reihe $r$ nicht nur non-oszillierend, was für eine Reihe mit positiven Gliedern erlaubt ist, sondern auch positiv-konvergent erklärt.

Der letztere Schluß beruht aber auf dem *Bolzano-Weierstraß*schen Satz und muß zusammen mit diesem verworfen werden.

Einen ganz anderen, lehrreicheren Beweis bringt *Pringsheim* in seinen *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre* I, 2, S. 378. Nachdem dort sowohl für den Fall der positiven Konvergenz wie für den Fall der positiven Divergenz von $b = \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \cdots$ die positive Konvergenz von $r$ bewiesen worden ist, wird angenommen, daß die Reihe $b$ entweder positiv-konvergent oder positiv-divergent sein muß, und aus diesem Grunde das allgemeine Kriterium bewiesen erklärt.

Die genannte Annahme ist aber unzulässig; denn auch ihr liegt der *Bolzano-Weierstraß*sche Satz zu Grunde.

Bemerkenswert ist nun, daß *Kummer* selbst sein Kriterium nur mit der Nebenbedingung $\lim B_n u_n = 0$ ausgesprochen hat [1]), und daß unter dieser Nebenbedingung, wie aus dem obigen Beweise unmittelbar hervorgeht, die positive Konvergenz der Reihe $r$ durch das Kriterium auch tatsächlich gesichert ist.

Daß nicht nur die Herleitungen des keiner Nebenbedingung unterliegenden *Kummer*schen Konvergenzkriteriums unzulänglich sind [2]), sondern auch das Kriterium selbst unrichtig ist, zeigt die obige weder positiv-konvergente noch negativ-konvergente Reihe d). Bestimmen wir nämlich zu dieser Reihe die sukzessiven $B_n$ aus den Relationen:

$$B_1 = 4, \qquad B_n \frac{u_n}{u_n + 1} - B_{n+1} = 1 \text{ für jedes } n,$$

so fallen alle $B_n$ positiv aus, so daß hier das erweiterte Konvergenzkriterium erfüllt ist, ohne daß positive Konvergenz besteht. Die nach *Kummer* im Anschluß an *Dini* stattgefundene *Fortlassung der Kummerschen Nebenbedingung* hat somit die Tragweite des betreffenden Konvergenzkriteriums erheblich beeinträchtigt.

---

[1]) Vgl. dieses Journal 13 (1835), S. 171.

[2]) Die Unzulänglichkeit dieser Herleitungen, im Gegensatz zur Korrektheit des ursprünglich von *Kummer* selbst für das engere Kriterium geführten Beweises, wurde mir als Beispiel der Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für die Theorie der unendlichen Reihen von meinem Schüler Herrn *M. J. Belinfante* angegeben.

# Eine Kennzeichnung der Kugel nach *W. Blaschke.*

Von *Kurt Reidemeister* in Wien.

Herr *W. Blaschke* hat in § 86 seiner Differentialgeometrie [1]) die Frage aufgeworfen, ob die Kugel dadurch gekennzeichnet sei, daß alle geodätischen Linien, die von einem Punkte $p$ ausgehen, sich in einem konjugierten Punkte $p'$ wieder sammeln. Dies ist in der Tat der Fall, und zwar gelingt der Beweis mittels eines topologischen Satzes von Herrn *E. Study*, der hier zum ersten Male veröffentlicht wird. Er lautet: Sei $\mathfrak{S}$ eine Schar geschlossener, doppeltpunktfreier Kurven auf einer Fläche $F$ vom Zusammenhang der Kugel. Wenn dann durch je drei Punkte von $F$ eindeutig eine Scharkurve bestimmt ist, so läßt sich $\mathfrak{S}$ durch eine Punkttransformation in die ebenen Schnitte einer konvexen Fläche $K$ überführen.

In § 1 werden aus den vorausgesetzten Eigenschaften der geodätischen Linien differentialgeometrische Folgerungen gezogen. In § 2 ergibt sich insbesondere, daß die „geodätischen Abstandskreise" den Voraussetzungen des Satzes von *Study* genügen. In § 3 wird der Satz von *Study* bewiesen und in § 4 die Kennzeichnung der Kugel zuende geführt.

## § 1. Flächen mit Paaren konjugierter Punkte.

Unter konjugierten Punkten verstehen wir aufeinander folgende Schnittpunkte unendlich benachbarter geodätischer Linien. Auf Flächen mit positiv definiter quadratischer Maßbestimmung gibt es i. a. zu jedem Punkt $p$ auf einer bestimmten geodätischen Linie zwei konjugierte Punkte, nämlich in beiden Richtungen auf der geodätischen Linie von $p$ aus gerechnet. Bei unseren Flächen ist nun gefordert, daß es nach links und rechts einen konjugierten Punkt gibt und daß diese beiden Punkte in einen, $p'$, den konjugierten Punkt von $p$, zusammenfallen. $p'$ muß also von links her und von rechts her von $p$ aus erreichbar sein. Daraus folgern wir für unsere Flächen:

(a.) *Alle geodätischen Linien sind geschlossen.*

Aus einem allgemeinen Satz der Variationsrechnung folgt:

(b.) *Die Länge des Bogens zwischen zwei konjugierten Punkten ist unabhängig von der Auswahl des Bogens gleich* $2R_{pp'}$. Denn die Bögen lassen sich stetig ineinander überführen, während die erste Variation der Bogenlänge verschwindet.

[1]) *W. Blaschke,* Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Berlin 1921, § 86, S. 155—158 In der zweiten Auflage erscheint ein Teil dieser Arbeit als Anhang.

(c.) *Zwischen zwei Punkten $p$ und $q$, die nicht zueinander konjugiert sind, gibt es einen und nur einen geodätischen Bogen, der die konjugierten Punkte $p'$ und $q'$ nicht enthält.*

Trage ich nämlich auf den geodätischen Linien von $p$ aus einen geodätischen Abstand $r$ ab, d. h. schlage ich den geodätischen Abstandskreis um $p$ mit dem Radius $r$, so überdeckt derselbe gewiß unsere Fläche schlicht, wenn $r$ genügend klein ist. Lasse ich nun $r$ wachsen, so kann sich hier niemals ein geodätischer Kreis selbst durchsetzen. Sonst gäbe es nämlich entweder einen geodätischen Kreis mit Spitze, was unmöglich, solange $r < 2R_{pp'}$ (vgl. a. a. O. S. 152), oder es gäbe einen Kreis mit einem Radius $r'$, der sich in mindestens einem Punkte $q$ selbst berührte, und die beiden geodätischen Radien von $p$ nach $q$ ständen beide auf dem geodätischen Kreise senkrecht, ergänzten sich also in $q$ zu einer geodätischen Linie.

Nun muß aber der geodätische Bogen $\overline{pqp}$ den konjugierten Punkt $p'$ enthalten. Denn angenommen, $p'$ läge in den Verlängerungen des Bogens $\overline{pqp}$ über $p$ hinaus, so wäre ersichtlich die Länge des Bogens $\overline{pqpp'}$ größer als die des Bogens $\overline{pp'}$ entgegen dem Satz (b.).

Wiederum nach (b.) muß aber $p'$ den Bogen $\overline{pqp}$ hälften, und daher muß $p'$ und $q$ zusammenfallen. Also ist $r' = 2\,R_{pp'}$ und der Kreis mit dem Radius $r'$ besteht nur aus $p'$. Daraus folgt außerdem:

(d.) *Flächen mit Paaren konjugierter Punkte haben den Zusammenhang der Kugel.*

Nunmehr läßt sich Satz (a.) verschärfen zu:

(e.) *Alle geodätischen Linien sind geschlossen und doppeltpunktfrei.* Gehe ich nämlich von $p$ über einen geodätischen Bogen nach $p'$ und in der Ankunftsrichtung weiter auf einem geodätischen Bogen nach $p$ zurück, so ist dieser Weg nach (c.) doppeltpunktfrei. Außerdem schließt sich aber der Weg in $p$, d. h. er verläuft in $p$ glatt, sonst gäbe es nämlich für ein Punkt $q$ unseres Bogens in der Nähe von $p'$ zwei verschiedene konjugierte Punkte.

(f.) *Alle geodätischen Linien sind gleich lang, oder $R_{pp'} = R$.*

Da die geodätischen Linien durch $p$ die Fläche glatt überdecken, hat eine (geschlossene) geodätische Linie durch irgendeinen Punkt $q$ gewiß mit einer geodätischen Linie durch $p$ Punkte gemeinsam, und zwar nach (c.) gerade zwei zueinander konjugierte, die $\bar{q}, \bar{q}'$ heißen mögen. Dann sind nach (b.) die vier Bögen $\overline{\bar{q}\bar{q}'}$ einander gleich und wir haben $4\,R_{qq'} = 4\,R_{\bar{q}\bar{q}'} = 4\,R_{pp'}$ [1]).

(g.) *Die geodätischen Linien sowie alle übrigen geschlossenen doppeltpunktfreien Kurven* $\mathfrak{k}$, *die mit $p$ auch $p'$ enthalten, trennen die konjugierten Punktepaare, die nicht auf ihnen liegen.* Für die geodätischen Linien folgt das am bequemsten aus (f.). Ist $p, p'$ ein konjugiertes Punktepaar der geodätischen Linie und $q$ irgend ein Punkt, der nicht auf ihr liegt, so ist der geodätische Abstand $\overline{qp}$ sowie der geodätische Abstand $\overline{qp'}$ kleiner als $2\,R$, und daher liegt $q'$ auf der geodätischen Linie durch $p, q$ und $p'$ von $q$ aus gerechnet jenseits $p$ und $p'$. Irgendeine geodätische Linie kann ich aber in jede Kurve $\mathfrak{k}$ deformieren, und zwar so, daß die Kurve in den Zwischenlagen immer mit $p$ auch $p'$ enthält. Und bei dieser Deformation bleibt die behauptete Eigenschaft erhalten.

---

[1]) Durch die Forderung, daß konjugierte Punkte konstanten Abstand haben sollen, sind unsere Flächen gekennzeichnet. Vgl. a. a. O.

## § 2. Die Schnittpunktseigenschaften der geodätischen Kreise.

Unter geodätischen Kreisen $\mathfrak{k}$ verstehen wir wie in § 1 Abstandskreise; wir zeichnen sie, indem wir auf allen geodätischen Linien durch einen Punkt $m$ einen festen geodätischen Abstand $r$ auftragen. Die geodätischen Radien stehen auf der Kreislinie senkrecht, wie schon beim Beweise von (c.) benutzt wurde. Alle geodätischen Kreise unserer Fläche sind nach (c.) topologische Kreise, und zerlegen daher die Fläche in zwei Teilgebiete.

Nach (b.) hat ein geodätischer Kreis zwei zueinander konjugierte Mittelpunkte $m$ und $m'$. Wir wollen aber hier nur denjenigen Punkt als Mittelpunkt bezeichnen, für den der Radius $r < R$ (vgl. (f.)) und das Teilgebiet als das Innere von $\mathfrak{k}$, das den Mittelpunkt $m$ enthält. Diese Festsetzungen gelten natürlich nur bei Kreisen, für die $r \neq R$ ist.

Wir wollen nun zeigen:

(h.) *Zwei geodätische Kreise haben höchstens zwei Punkte gemeinsam.*

Der Beweis beruht im wesentlichen auf Satz (c.). Angenommen, es gäbe zwei Kreise $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$, die mehr als zwei Punkte, also als geschlossene Kurven mindestens vier Punkte gemeinsam haben. Wir können ihre Radien $\neq R$ voraussetzen. $m_1$ und $m_2$ seien ihre Mittelpunkte, $r_1$ und $r_2$ ihre Radien. Es kann nun erstens etwa $m_2$ im Äußeren von $\mathfrak{k}_1$ liegen.

Seien $p_1, p_2, p_3, p_4$ vier aufeinander folgende Schnittpunkte von $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$, und der Bogen $\overline{p_1\,p_2}$ sowie $\overline{p_3\,p_4}$ von $\mathfrak{k}_1$ liege innerhalb von $\mathfrak{k}_2$. Ein Kreis $\mathfrak{k}_2'$ mit dem Mittelpunkt $m_2$ und etwas kleinerem Radius $r_2'$ ($r_2' < r_2$) möge $\mathfrak{k}_1$ in $p_1', p_2', p_3', p_4'$ schneiden. Dann liegt der Bogen $\overline{p_1'\,p_2'}$ von $\mathfrak{k}_1$ innerhalb des Bogens $\overline{p_1\,p_2}$ von $\mathfrak{k}_1$, und ebenso $\overline{p_3'\,p_4'}$ innerhalb von $\overline{p_3\,p_4}$, und es muß daher einen Kreis $\mathfrak{k}_2''$ mit dem Mittelpunkt $m_2$ und dem Radius $r_2''$ geben ($r_2'' < r_2' < r_2$), der entweder $\mathfrak{k}_1$ in einem Punkt $p_1''$ innerhalb $\overline{p_1\,p_2}$ berührt und in $p_3'', p_4''$ innerhalb $\overline{p_3\,p_4}$ schneidet, oder der $\mathfrak{k}_1$ in $p_3''$ innerhalb $\overline{p_3\,p_4}$ berührt und in $p_1'', p_2''$ innerhalb $\overline{p_1\,p_2}$ schneidet oder der $\mathfrak{k}_1$ in $p_1''$ und $p_3''$ innerhalb $\overline{p_1\,p_2}$ bzw. $\overline{p_3\,p_4}$ berührt.

Alle drei Folgerungen sind aber unmöglich. Ziehen wir nämlich im ersten Falle die beiden Radien von $m_1$ und $m_2$ nach $p_1''$, so verläuft der daraus zusammengesetzte geodätische Bogen $\overline{m_1\,p_1''\,m_2}$ in $p_1''$ glatt, weil beide Radien auf derselben Richtung in $p_1''$ senkrecht stehen. Außerdem ist der Bogen $\overline{m_1\,p_1''\,m_2}$ gleich $r_1 + r_2'' < 2R$ und daher nach (c.) die kürzste Verbindung von $m_1$ und $m_2$. Verbinden wir aber einen inneren Punkt $p$ des Bogens $\overline{p_3''\,p_4''}$ mit $m_1$ und $m_2$ durch geodätische Linien, so erhalten wir einen Weg $\overline{m_1\,p\,m_2}$, dessen Länge gleich $r_1 + r_2'' - \delta < r_1 + r_2''$ ist. — Aus demselben Grund ist der zweite Fall unmöglich. Im dritten Fall liefern die aus geodätischen Radien zusammengesetzten Bögen $\overline{m_1\,p_1''\,m_2}$ und $\overline{m_1\,p_3''\,m_2}$ zwei gleich lange kürzeste Wege, im Widerspruch mit (c.).

Ganz ähnlich verfährt man, wenn $m_1$ im Innern von $\mathfrak{k}_2$ und $m_2$ im Innern von $\mathfrak{k}_1$ liegt. Man findet hier aus der Annahme von vier oder mehr Schnittpunkten einen Kreis $\mathfrak{k}_2''$ mit dem Mittelpunkt $m_2$ und dem Radius $r_2''$, der $\mathfrak{k}_1$ von innen

her in $p_1''$ berührt und mindestens noch einen weiteren Punkt $p_3''$ mit $\mathfrak{k}_1$ gemeinsam hat. Der geodätische Abstand $\overline{m_1 m_2}$ ist gleich $r_1 - r_2''$; denn die durch $m_1$ und $m_2$ bestimmte geodätische Linie, bzw. der geodätische Radius von $\mathfrak{k}_1$ durch $m_2$, geht durch den Berührungspunkt $p_1''$, weil die beiden geodätischen Radien von $\mathfrak{k}_1$ bzw. $\mathfrak{k}_2$ durch $p_1''$ auf derselben Richtung senkrecht stehen müssen. Und daher wäre der Weg über den geodätischen Bogen $\overline{m_1 m_2}$ und $\overline{m_2 p_2''}$ ebenso lang wie die kürzeste Verbindung $\overline{m_1 p_2''}$, nämlich gleich $r_1 < R$, im Widerspruch zu Satz (c.). Liegt $m_1$ auf $\mathfrak{k}_2$ und $m_2$ auf $\mathfrak{k}_1$, so können wir durch eine kleine Veränderung von $r_1$ etwa einen der behandelten Fälle erzielen.

Andererseits zeigen wir:

(i.) *Drei Punkte $p_1, p_2, p_3$ bestimmen stets einen Kreis.*

Die Mittelpunkte der Kreise durch zwei Punkte $p_1, p_2$ findet man als Schnittpunkte der Kreise um $p_1$ und $p_2$ mit zueinander gleichen Radien. Ist der Abstand $\overline{p_1 p_2}$ gleich $r_{12}$, so entsprechen jedem $r$, für das $r_{12} < r < 2R - r_{12}$ ist, immer gerade zwei verschiedene Punkte $m$. Die beiden $r$ entsprechenden Punkte sind konjugiert zu den beiden $2R - r$ entsprechenden. Jedem Punkte aber entspricht eindeutig ein $r$. Die Kurve der Mittelpunkte $m$ ist also geschlossen und doppelpunktfrei, und sie enthält mit jedem Punkt $m$ auch den konjugierten $m'$.

Sind nun $p_1, p_2, p_3$ irgend drei Punkte und ist $\mathfrak{m}_1$ die Mittelpunktskurve der Kreise durch $p_2, p_3$ und $\mathfrak{m}_2$ die Mittelpunktskurve der Kreise durch $p_1, p_3$ so haben $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ nach Satz (g.) mindestens zwei zueinander konjugierte Schnittpunkte, und jeder Schnittpunkt liefert einen Kreis durch $p_1\, p_2\, p_3$.

Aus den geodätischen Kreisen lassen sich die geodätischen Linien leicht punktweise konstruieren. Sind nämlich $\mathfrak{k}_1(r_1)$ und $\mathfrak{k}_2(r_2)$ zwei Kreisbüschel, deren Kreise sich bzw. in den konjugierten Punkten $p$ und $p'$ berühren, und die einen Kreis gemeinsam haben, so liegen die Berührungspunkte der Kreise mit den Radien $r_1$ und $r_2 = R - r_1$ gerade auf einer geodätischen Linie durch $p$ und $p'$.

## § 3. Der Satz von *E. Study*.

Wir beweisen jetzt den topologischen Satz, der von Herrn *E. Study* ausgesprochen worden ist und folgendermaßen lautet:

Es sei $F$ eine Fläche vom Zusammenhang der Kugel und $\mathfrak{S}$ eine Schar geschlossener doppelpunktfreier Kurven $\mathfrak{k}$ auf der Fläche. Bestimmen dann irgend drei Punkte von $F$ eindeutig eine Kurve $\mathfrak{k}$, so läßt sich $F$ so auf eine konvexe Fläche $K$ abbilden, daß die Schar $\mathfrak{S}$ in die Schar der ebenen Schnitte von $K$ übergeht.

Ich will die Kurven $\mathfrak{k}$ kurz als Kreise bezeichnen. Die Gesamtheit der Kreise durch zwei Punkte $p_1, p_2$ nenne ich ein Kreisbüschel, $BS$, mit dem Punktepaar $p_1, p_2$. Zwei Kreise des Büschels bestimmen dieses, und wir sagen: zwei Kreise des Büschels lassen sich durch Drehung um das Punktepaar $p_1, p_2$ ineinander überführen. Durch jeden Punkt von $F$ geht gerade ein Kreis des Büschels hindurch. — Zwei Kreise müssen sich in den Punkten $p_1$ und $p_2$ durchsetzen. Sonst wären nämlich die sämtlichen Kreise eines Büschels ineinander geschachtelt, und

es gäbe zwei Kreise des Büschels, die aus einem doppelt durchlaufenen Kurvenstück beständen.

Ähnlich erklären wir ein Kreisbündel, *BD*, als eine Schar von Kurven, die sich aus drei geeigneten Kreisen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$ durch eine Folge von Drehungen herleiten läßt, unter der Voraussetzung nämlich, daß zwei der Kreise $\mathfrak{k}_i$ ein Büschel bestimmen, dessen Punktepaar durch den dritten Kreis getrennt wird. Bei dieser Annahme bestimmen je zwei Kreise ein Büschel, dessen Punktepaar durch den dritten getrennt wird. Die Schnittpunkte irgend zweier Kreise des Bündels nennen wir ein Punktepaar des Bündels und erklären die Gesamtheit der Kreise, die sich aus $\mathfrak{k}_1$ durch auf einander folgende Drehungen um Punktepaare des Bündels herleiten lassen, als die Kreise des durch $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$ bestimmten Bündels. Die Bevorzugung von $\mathfrak{k}_1$ ist nur formell, da $\mathfrak{k}_2$ und $\mathfrak{k}_3$ sich in $\mathfrak{k}_1$ verdrehen lassen.

Wenn $\mathfrak{k}_1'$ aus $\mathfrak{k}_1$ durch eine Folge von Drehungen hergeleitet werden kann, so gilt auch das Umgekehrte: $\mathfrak{k}_1$ geht aus $\mathfrak{k}_1'$ durch eine Folge von Drehungen um Bündelpunktpaare hervor. Überdies trennt $\mathfrak{k}_1'$ das Punktepaar von $(\mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3)$; denn nach Voraussetzung tut es $\mathfrak{k}_1$, und wenn $\bar{\mathfrak{k}}$ irgendein Kreis mit dieser Eigenschaft ist, so gilt dies auch für alle Kreise der Büschel $(\bar{\mathfrak{k}}, \mathfrak{k}_2)$ und $(\bar{\mathfrak{k}}, \mathfrak{k}_3)$, wofern nur der Kreis von $\mathfrak{k}_2$ und $\mathfrak{k}_3$ verschieden ist.

Danach ist ein Bündel durch irgend drei seiner Kreise bestimmt; denn ist $\mathfrak{k}_1'$ irgendein Kreis des Bündels, so bestimmen $\mathfrak{k}_1', \mathfrak{k}_2\, \mathfrak{k}_3$ ein Bündel, und dieses enthält auch $\mathfrak{k}_1$. — Irgend zwei Punktepaare des Bündels, die auf einem seiner Kreise liegen, trennen einander.

Nun einiges über Büschel und Bündel!

(1) *Ein Bündel und ein Büschel haben entweder einen Kreis gemeinsam oder das Büschel ist im Bündel enthalten.* Sei $p_1, p_2$ das Punktepaar des Büschels, $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$ die definierenden Kreise des Bündels. Ich kann gewiß $\mathfrak{k}_1$ durch einen $\mathfrak{k}_1'$ des Büschels $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ ersetzen, welcher durch $p_1$ hindurchgeht, und ebenso $\mathfrak{k}_2$ durch einen Kreis $\mathfrak{k}_2'$ des Büschels $(\mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3)$, einen anderen Kreis durch $p_1$. Dann schneiden sich also $\mathfrak{k}_1'$ und $\mathfrak{k}_2'$ in $p_1$ und ich kann $\mathfrak{k}_1'$ weiter in einen Bündelkreis $\mathfrak{k}_1''$ verdrehen, der $p_1$ und $p_2$ enthält. Büschel und Bündel haben also gewiß einen Kreis gemeinsam, und wenn sie noch einen weiteren gemeinsam haben, so ist durch diese beiden das Büschel bereits bestimmt.

(2) *Zwei Büschel BD und BD′ haben ein Büschel oder alle ihre Kreise gemeinsam.* Jedes Büschel von *BD′* hat mit *BD* und jedes Büschel von *BD* mit *BD′* mindestens einen Kreis gemeinsam; angenommen nun, *BD* und *BD′* hätten nur einen Kreis gemeinsam, so lägen alle Punktepaare von *BD* und *BD′* auf einem einzigen Kreis $\mathfrak{k}$ und das ist unmöglich. Denn *BD* z. B. ist durch $\mathfrak{k}$ und zwei andere seiner Kreise $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ bestimmt; alsdann trennt aber $\mathfrak{k}$ das Punktepaar des Büschels $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$. Zwei Bündel haben also mindestens ein Büschel gemeinsam, und haben sie noch einen weiteren Kreis gemeinsam, so sind beide Bündel identisch.

(3) *Drei Bündel haben einen Kreis oder ein Büschel oder alle Kreise gemeinsam.* Der Beweis folgt ohne Schwierigkeiten aus (1) und (2).

Nun ordnen wir den Kreisen, Büscheln und Bündeln ideale Elemente zu, und zwar den

Kreisen $\mathfrak{k}$ ideale Ebenen $E$,
Büscheln $BS$ ideale Geraden $\Gamma$,
Bündeln $BD$ ideale Punkte $\Pi$,
und erklären zunächst die vereinigte Lage der idealen Elemente:

Ein Punkt $\Pi$ liegt auf einer Geraden $\Gamma$, wenn das zugeordnete Bündel $BD$ das zugeordnete Büschel $BS$ enthält.

Ein Punkt $\Pi$ liegt in einer Ebene $E$, wenn das zugeordnete Bündel $BD$ den zugeordneten Kreis $\mathfrak{k}$ enthält.

Eine Gerade $\Gamma$ liegt in einer Ebene $E$, wenn das zugeordnete Büschel $BS$ den zugeordneten Kreis $\mathfrak{k}$ enthält.

Daraus und aus den Sätzen (1), (2) und (3) erschließt man: *Die $\Pi, \Gamma, E$ erfüllen die projektiven Verknüpfungsaxiome, die für die Elemente eines konvexen Stückes des projektiven Raumes gelten.*

Man errät nun schon, wie der Beweis weitergeht: die idealen Elemente werden auch die Stetigkeitsaxiome und die Anordnungsaxiome erfüllen und sich daher nach *F. Schur* in den gewöhnlichen projektiven Raum einbetten lassen [1]).

In der Tat: die Bündel $BD^*$, die das Büschel $BS_1^*$ enthalten, lassen sich stetig auf die Punkte einer gewöhnlichen Strecke abbilden. Ist nämlich $BS'$ ein Büschel, das nicht mit $BS^*$ zugleich in ein und demselben Bündel enthalten ist, so bilden die Kreise, die $BS'$ und den $BD^*$ gemeinsam sind, ein lineares Kontinuum mit 2 „Randpunkten". Randelemente sind nämlich die beiden Kreise von $BS'$ durch die Punkte des Punktepaares von $BS'$. Ich erkläre nun: $BD_2^*$ liegt zwischen $BD_1^*$ und $BD_3^*$, wenn die entsprechenden Kreise von $BS'$ es tun. Diese Festsetzung ist aber von der Auswahl von $BS'$ unabhängig. Denn alle $BS'$ lassen sich stetig ineinander überführen, und dabei kann niemals z. B. der $BD_1^*$ und $BD_2^*$ entsprechende Kreis zusammenfallen; denn alsdann könnte ich $BD_1^*$ und $BD_2^*$ durch dieselben 3 Kreise bestimmen, und die beiden Bündel wären identisch Daraus folgen die Axiome der Stetigkeit und der Anordnung für die $\Pi$ und $\Gamma$.

Das ebene Anordnungsaxiom ergibt sich ganz ähnlich. Zerlegt $\mathfrak{k}$ die Fläche $F$ in die Gebiete $I$ und $A$ und ist $BD'$ ein Bündel, das $\mathfrak{k}$ nicht enthält, so bestimmt jedes Bündel, das $\mathfrak{k}$ enthält, mit $BD'$ zusammen ein Büschel, und ein Punkt des diesen Büscheln zugehörigen Punktepaares liegt in $I$. Ebenso entspricht jedem Büschel, das $\mathfrak{k}$ enthält, ein Kreis der $BD'$ angehört. Der Teil dieses Kreises in $I$ repräsentiert uns das Büschel. Unsere Punkte und Kurvenstücke in $I$ erfüllen nun das ebene Anordnungsaxiom, und man erkennt wie oben, daß sich die Lagebeziehungen der Repräsentanten zu einer Erklärung der Lagebeziehungen der Büschel und Bündel, welche $\mathfrak{k}$ enthalten, verwerten lassen.

Damit ist die Abbildung der $\Pi, \Gamma, E$ auf die Punkte, Geradenstücke und Ebenenstücke, die im Innern eines konvexen Körpers liegen, sichergestellt, und dadurch wird eine Abbildung von $F$ auf den Rand $K$ dieses konvexen Bereiches vermittelt, wie sie unser Satz behauptet.

Den Randpunkten $\Pi_K$ entsprechen nämlich entartete Bündel, die aus allen

[1]) Vgl. *F. Schur*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig und Berlin 1909, §§ 1, 2 u. 8.

Kreisen bestehen, welche durch einen Punkt $p$ von $F$ hindurchgehen. Die $p$ und die $\Pi_K$ sind also eineindeutig und stetig auf einander bezogen. Ein Kreis $\mathfrak{k}$ ist in allen und nur den entarteten Bündeln enthalten, die durch die Punkte $p$ des Kreises bestimmt sind, und die Ebene $E$, die dem Kreise entspricht, enthält daher alle und nur die $\Pi_K$, deren $p$ auf $\mathfrak{k}$ liegen. Die Abbildung der $p$ auf die $\Pi_K$ vermittelt also eine eineindeutige stetige Abbildung von $F$ auf $K$, bei der die Kreise $\mathfrak{k}$ in die ebenen Schnitte von $\mathfrak{k}$ übergehen.

## § 4. Die Kennzeichnung der Kugel.

Nach § 2 erfüllen die geodätischen Kreise die Voraussetzungen des Satzes von *Study*. Wir können daher unter $F$ eine reguläre Fläche mit Paaren konjugierter Punkte und unter $\mathfrak{k}$ die geodätischen Abstandskreise dieser Fläche verstehen.

Wir konstruieren nun nach der Schlußbemerkung von § 2 die Bildkurven der geodätischen Linien auf der konvexen Fläche $K$; die Punkte $\Pi_K$ der Bildkurve liegen auf Ebenen $E_{r_1}$ und $E_{r_2}$, die zwei Ebenenbüscheln angehören, die eine Ebene gemeinsam haben, und eine Tangente von $K$ in $\Pi_K$ ergibt sich als die $E_{r_1}$ und $E_{r_2}$ gemeinsame Gerade in dem über $K$ hinaus erweiterten projektiven Raume. Die Tangentenebenen von $K$ längs einer Bildkurve einer geodätischen Linie umhüllen also einen Kegel. Die Spitzen der Kegel, die den geodätischen Linien eines Büschels durch zwei konjugierte Punkte zugeordnet sind, liegen auf einer Geraden, und weil zwei solche Büschel stets eine geodätische Linie gemeinsam haben, schneiden sich die entsprechenden Geraden stets. Sie erfüllen also eine Ebene. Wir wählen sie als unendlichferne Ebene und finden somit:

*Die Bildkurven der geodätischen Linien sind die Berührungskurven der der konvexen Fläche umbeschriebenen Zylinder, die „Schattengrenzen" von $K$.*

Unter unseren Voraussetzungen berühren alle diese Zylinder also in Kurven und $K$ enthält keine Geradenstücke. Daher wird $K$ durch parallele Normalen eineindeutig und stetig auf die Kugel abgebildet und dabei werden die Schattengrenzen in die Großkreise der Kugel übergeführt. Damit ist zugleich eine Abbildung von $F$ auf eine Ebene hergestellt, bei der die geodätischen Linien von $F$ in die Geraden übergehen. *E. Beltrami* [1]) hat gezeigt, daß alsdann $F$ konstantes *Gaußi*sches Krümmungsmaß haben muß.

Wenn wir nun $F$ als überall regulär voraussetzen, so folgt nach dem Satze von *H. Liebmann* [2]) über die Unverbiegbarkeit der Kugel, daß $F$ die Kugel ist.

[1]) *E. Beltrami*, 1866 Opere I. S. 262—280.
[2]) Göttinger Nachrichten 1899, S. 44—55.

# Zur Geometrie der *Laguerre*-Gruppe.

Von *Heinrich Liebmann* in Heidelberg.

Die *Laguerre*sche Gruppe [1]) — darunter sei die Gesamtheit der (längentreuen) Geradentransformationen verstanden, die Kreise in Kreise überführen, ein Ausschnitt also aus der Gruppe der Berührungstransformationen der Kreise [2]) — baut sich aus trivialen Transformationen (Bewegung und Dilatation) und den eigentlichen „Linieninversionen" auf. Sie ist als instruktives Beispiel für die von *G. Pick* begründete „natürliche Geometrie der Gruppen" zu verwenden, scheint aber in diesem Sinne noch nicht behandelt worden zu sein.

Die folgende kurze Darlegung gibt in Nr. 1 die sechs erzeugenden infinitesimalen Transformationen an, in Nr. 2 wird die niedrigste Differentialinvariante in bestimmter Form berechnet („*Laguerrekrümmung*" $L$), in Nr. 3 ein invariantes Kurvenintegral (der auch ohne Rechnung geometrisch zu erfassende „*Laguerreparameter*" $\lambda$ ); Nr. 4 gibt die Lösung des dazugehörigen Variationsproblems.

1. Die rechtwinkligen Punktkoordinaten $(x, y)$ ergeben als Koordinaten eines Linienelementes

$$x,\ y,\ y_1 = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \tau$$

Die Linienkoordinaten $\varphi$ — Winkel des von $O$ auf diese Gerade gefällten Lotes $OF$ mit der $x$-Achse — $p(OF)$ und dazu $p_1 = \frac{dp}{d\varphi}$ zur Bestimmung des Linienelementes, dessen Träger der Punkt $P$ der Geraden ist ($FP = p_1$) hängen mit ihnen durch die Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned} x &= p\cos\varphi - p_1 \sin\varphi, \\ y &= p\sin\varphi + p_1\cos\varphi, \\ y_1 &= -\operatorname{cotg}\varphi \quad \left(\text{oder } \tau = \frac{\pi}{2} + \varphi\right). \end{aligned}$$

Zwei benachbarte Linienelemente bestimmen ein Krümmungselement; man erhält den Krümmungsradius $\varrho$ aus

$$\varrho\cos\tau = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{d\varphi} = -\left(p + \frac{d^2p}{d\varphi^2}\right)\sin\varphi = -(p + p_2)\sin\varphi$$

$$\varrho\sin\tau = (p + p_2)\cos\varphi,$$

[1]) Vgl. hierzu Nr. 14 und 24 des Artikels III AB 4b der math. Enzyklopädie (*Gino-Fano*). Kontinuierliche geometrische Gruppen.

[2]) *Lie-Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen 1 (Leipzig 1896), S. 150.

es ist also

$$\varrho = p + p_2.$$

Verlangt man von einer Geradentransformation, daß sie streckentreu sein soll, so kommt man auf die Forderung

$$\bar{P}_1 \bar{P}_2 = \Delta\left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{\varphi}}\right) = P_1 P_2 = \Delta\left(\frac{dp}{d\varphi}\right),$$

oder also

$$\bar{\varphi} = f(\varphi),$$
$$\bar{p} = pf' + g(\varphi).$$

Nachdem diese einfache Grundlage in Erinnerung gebracht ist, erhält man für die infinitesimalen Transformationen den Ansatz

$$\bar{\varphi} = \varphi + \delta\varphi = \varphi + \varepsilon\,\Phi(\varphi),$$
$$\bar{p} = p + \delta p = p + \varepsilon P = p + \varepsilon(p\Phi_1 + G(\varphi)),$$

und hieraus für die Erweiterungen (Zuwachsgrößen der Differentialquotienten von $p$ nach $\varphi$) nach *S. Lie*

$$P_1 = \frac{dP}{d\varphi} - p_1\frac{d\Phi}{d\varphi} = p\Phi_2 + p_1\Phi_1 + G_1 - p_1\Phi_1 = G_1 + p\Phi_2,$$
$$P_2 = \frac{dP_1}{d\varphi} - p_2\frac{d\Phi}{d\varphi} = G_2 + p\Phi_3 + p_1\Phi_2 - p_2\Phi_1,$$
$$P_3 = \frac{dP_2}{d\varphi} - p_3\frac{d\Phi}{d\varphi} = G_3 + p\Phi_4 + 2p_1\Phi_3 - 2p_3\Phi_1$$

usw.

Verlangt man jetzt, daß Kreise in Kreise übergehen, daß also die Differentialgleichung

$$\frac{dp}{d\varphi} + \frac{d^3p}{d\varphi^3} = p_1 + p_3 = 0$$

invariant bleibt, so muß

$$P_1 + P_3 = G_1 + G_3 + p(\Phi_2 + \Phi_4) + 2p_1\,(\Phi_3 + \Phi_1)$$

gleich Null sein, unabhängig von $p$ und $p_1$ also

$$\Phi = a_1 + a_5\cos\varphi - a_6\sin\varphi,$$
$$G = a_2 + a_3\cos\varphi - a_4\sin\varphi.$$

Hiermit ist die sechsgliedrige äquilonge Gruppe der Kreise gewonnen, und man erhält für die Zuwachsgrößen bei den einzelnen erzeugenden Transformationen die Tabelle

$(a_1)$ $\quad \Phi = 1,\ P = P_1 = P_2 = \cdots = 0,$

$(a_2)$ $\quad \Phi = 0,\ P = 1,\ P_1 = P_2 = \cdots = 0,$

$(a_3)$ $\quad \Phi = 0,\ P = -P_2 = P_4 = \cdots = \cos\varphi,$
$\qquad P_1 = -P_3 = P_5 = \cdots = -\sin\varphi,$

$(a_4)$ $\quad \Phi = 0,\ P = -P_2 = P_4 = \cdots = -\sin\varphi,$
$\qquad P_1 = -P_3 = P_5 = \cdots = -\cos\varphi.$

$(a_5)$ $\quad \Phi = \cos\varphi,\ P = p\Phi_1 = -p\sin\varphi,$
$\qquad P_1 = -p_1\sin\varphi - p\cos\varphi + p_1\sin\varphi = -p\cos\varphi,$
$\qquad P_2 = -p_1\cos\varphi + p\sin\varphi + p_2\sin\varphi = -p_1\cos\varphi$
$\qquad\qquad + (p + p_2)\sin\varphi,$

und nach dieser Vorschrift weiter

$$
\begin{aligned}
& P_3 = p\cos\varphi + 2(p_1 + p_3)\sin\varphi,\\
& P_4 = (3p_1 + 2p_3)\cos\varphi + (-p + 2p_2 + 3p_4)\sin\varphi,\\
& P_5 = (-p + 5p_2 + 5p_4)\cos\varphi + (-4p_1 + 4p_5)\sin\varphi,
\end{aligned}
$$

$(a_6)$ $\qquad \Phi = -\sin\varphi,\ P = -p\cos\varphi,$

$$
\begin{aligned}
& P_1 = p\sin\varphi,\\
& P_2 = p_1\sin\varphi + (p + p_2)\cos\varphi,\\
& P_3 = -p\sin\varphi + 2(p_1 + p_3)\cos\varphi\\
& P_4 = -(3p_1 + 2p_3)\sin\varphi + (-p + 2p_2 + 3p_4)\cos\varphi,\\
& P_5 = -(-p + 5p_2 + 5p_4)\sin\varphi + (-4p_1 + 4p_5)\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Die sechste infinitesimale Transformation geht aus der fünften hervor wie die vierte aus der dritten; man hat $\varphi$ zu ersetzen durch $\frac{\pi}{2} + \varphi$.

---

2. Um sodann die Differentialinvariante niedrigster Ordnung $f(\varphi, p, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ zu berechnen, beachte man, daß wegen $(a_1)$ und $(a_2)$ $f$ von $\varphi$ und $p$ frei sein muß. $(a_3)$ und $(a_4)$ führen dann auf

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_3} + \frac{\partial f}{\partial p_5} = 0,\\
& \frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial p_4} = 0;
\end{aligned}
$$

also enthält $f$ die Größen

$$\varrho_1 = p_1 + p_3,\ \varrho_2 = p_2 + p_4,\ \varrho_3 = p_3 + p_5,$$

die drei ersten Differentialquotienten des Krümmungsradius nach $\varphi$ (oder $\tau$).

$(a_5)$ und $(a_6)$ ergeben dann noch die Forderungen:

$$-p\frac{\partial f}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial f}{\partial p_2} + p\frac{\partial f}{\partial p_3} + (3p_1 + 2p_3)\frac{\partial f}{\partial p_4} + (-p + 5p_2 + 5p_4)\frac{\partial f}{\partial p_5} = 0,$$

$$(p + p_2)\frac{\partial f}{\partial p_2} + 2(p_1 + p_3)\frac{\partial f}{\partial p_3} + (-p + 2p_2 + 3p_4)\frac{\partial f}{\partial p_4} + 4(-p_1 + p_5)\frac{\partial f}{\partial p_5} = 0,$$

oder nach Einführung von $\varrho_1, \varrho_2$ und $\varrho_3$:

$$
\begin{aligned}
& 2\varrho_1\frac{\partial f}{\partial \varrho_1} + 5\varrho_3\frac{\partial f}{\partial \varrho_3} = 0,\\
& 2\varrho_1\frac{\partial f}{\partial \varrho_1} + 3\varrho_2\frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + (4\varrho_3 - 2\varrho_1)\frac{\partial f}{\partial \varrho_3} = 0,
\end{aligned}
$$

und man erhält hieraus die rationale Invariante

$$L = 4\varrho_3\varrho_1^{-2},\ -5\varrho_2^2\varrho_1^{-3} - 4\varrho_1^{-1},$$

die wir als „*Laguerrekrümmung*“ bezeichnen wollen.

Wir fragen nach den Kurven konstanter Laguerrekrümmung und können sie durch eine geometrische Überlegung vorab bestimmen.

Fällt man auf die Tangente der Evolvente des Kreises mit dem Radius $a$ aus dem Kreismittelpunkt das Lot $OF$, so ist die Strecke bis zum Berührungspunkt $(FP)$ wieder gleich $a$. Die Kreisevolventen sind also „Äquitangentialkurven“ zu den mit dem Grundkreis der Evolvente konzentrischen Kreisen. Man wird gut tun, dabei die

Kreise mit einem Umlaufsinn zu versehen und demgemäß nur je einen Ast der Evolventen zu beachten. Bei „Linieninversion" — Bewegung und Dilatation führen auf keine neuen Formen — werden aus diesen Evolventen dann Äquitangentialkurven zu den Scharen von $\infty^1$ orientierten Kreisen mit gemeinsamem orientierten Tangentenpaar, und die Krümmung $L$ ändert sich nicht.

Sodann ist zu beachten, daß die Kreisevolvente

$$p = a\varphi$$

konstante Krümmung

$$L = -4a^{-1}$$

besitzt, und somit sind alle Kurven konstanter Laguerrekrümmung Kreisevolventen und die durch Linieninversion daraus entstehenden Kurven, besser „Stützorte von orientierten Geraden" gewonnen.

---

3. Nach dem „Codex" der natürlichen Geometrie der Gruppen hätte die jetzt folgende Bestimmung des invarianten „*Laguerreparameters*" vorausgehen sollen; er wäre der Invariantenberechnung zugrunde zu legen, d. h. man hätte ihn als unabhängige Variable (nicht den Winkel $\varphi$) zu verwenden.

Man kann ihn wieder rein geometrisch gewinnen. Vier aufeinanderfolgende Tangenten einer Kurve seien mit $t_0, t_1, t_2, t_3$ bezeichnet und die Tangenten des Krümmungskreises mit $t_0, t_1, t_2, \bar{t}_3$ die Abschnitte auf $t_1$ und $t_2$ für die Kurve mit $\Delta t_1$ und $\Delta t_2$, für den Krümmungskreis aber mit $\Delta t_1$ und $\Delta \bar{t}_2$.

Dann ist

$$\Delta t_2 - \Delta \bar{t}_2 = \varrho \Delta\tau + \tfrac{1}{2}\Delta\varrho\,\Delta\tau - \varrho\,\Delta\tau - 0\cdot\Delta\tau = \tfrac{1}{2}\Delta\varrho\,\Delta\tau$$

Diese Größe muß aber bei unserer äquilongen Gruppe, die Kreise in Kreise überführt, invariant sein, und somit gelangen wir zu dem durch

$$\lambda = \int \sqrt{d\varrho\, d\tau}$$

definierten „*Laguerreparameter*".

Rechnerisch findet man ihn aus dem Ansatz

$$\delta(f d\varphi) = \varepsilon\left(f\Phi' + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\Phi + \frac{\partial f}{\partial p}P + \cdots\right) = 0.$$

$(a_1)$ und $(a_2)$ zeigen, daß $f$ von $\varphi$ und $p$ frei sein muß, $(a_3)$ und $(a_4)$ weiter, daß $f$ nur die Differentialquotienten von $\varrho$ enthalten darf, $(a_5)$ und $(a_6)$ führen endlich darauf, daß schon dreimalige Erweiterung genügt, um aus

$$\sin\varphi\left(-f + 2\varrho_1 \frac{\partial f}{\partial \varrho_1}\right) = 0$$

bez.

$$\cos\varphi\left(-f + 2\varrho_1 \frac{\partial f}{\partial \varrho_1}\right) = 0$$

das invariante Integral

$$\int \varrho_1^{\frac{1}{2}}\, d\varphi = \int \sqrt{d\varrho\, d\varphi} = \int \sqrt{d\varrho\, d\tau}$$

zu gewinnen.

Bei Einführung von $\lambda$ wäre dann auch die Berechnung von $L$, wie schon erwähnt, einfacher ausgefallen.

Man hätte — mit Einführung von $\lambda$, also bei Differentiation nach $\lambda$ — erhalten

$$L = 2\varrho_1^{-1}\,(4\varrho_3 + 3\varrho_2^2\,\varrho_1^{-1} - 2\varrho_1^{-1}).$$

Die „natürliche Gleichung" einer Kurve ist dann in der Form zu schreiben

$$\frac{dL}{d\lambda} = F(L).$$

---

4. Die *Extremalenbestimmung* vom Bogenelement $d\lambda$, also die Lösung des Variationsproblems

$$\delta \int \sqrt{d\varrho\, d\varphi} = \delta \int (p_1 + p_3)^{\frac{1}{2}}\, d\varphi$$

ist leicht auszuführen, denn die *Euler*sche Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Big(\frac{d}{d\varphi}\,(p_1 + p_3)^{-\frac{1}{2}} + \frac{d^3}{d\varphi^3}\,(p_1 + p_3)^{-\frac{1}{2}}\Big) = 0$$

hat die Lösung

$$p_1 + p_3 = \frac{1}{(c + a\cos\varphi + b\sin\varphi)^2}$$

und zeigt durch einfache Rechnung, daß die Extremalen die Laguerrekrümmung

$$L = 4(a^2 + b^2 - c^2)$$

besitzen, also die uns schon aus Nr. 2 bekannten Kurven konstanter Laguerrekrümmung sind.

Schließlich sind die Kreisevolventen (und mit ihnen die Kurven mit konstantem $L$) auch noch die Bahnen der Linienelemente bei den eingliedrigen Untergruppen.

Betrachtet man z. B. die Gruppe

$$\bar{\varphi} = \varphi + t,$$
$$\bar{p} = p + at,$$

so geht

$$p = a(\varphi - \varphi_0)$$

über in

$$\bar{p} = a(\varphi - \varphi_0) + at = a(\bar{\varphi} - \varphi_0),$$

also sind die $\infty^1$ Kreisevolventen des Kreises

$$x^2 + y^2 = a^2$$

hier die Bahnkurven.

Daß ein und dieselben Kurven gleichzeitig Bahnkurven der Untergruppen und Extremalen des Variationsproblems sind, aber auch noch alle möglichen konstanten Krümmungswerte besitzen, diese volle Vereinigung von drei Eigenschaften finden wir noch in der sechsgliedrigen Gruppe der (konformen) Punkttransformationen der Kreise [1]), und in dieser Einheitlichkeit sind beide Gruppen den euklidischen und nichteuklidischen Bewegungsgruppen überlegen.

Heidelberg, im Oktober 1923.

---

[1]) Vgl. die Arbeit des Verfassers: Beiträge zur Inversionsgeometrie III, Heidelberger Berichte 1923, 4. Abhandlung.

# Direkter Beweis des Zerlegungs- und Vertauschungssatzes für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper im Falle eines Primteilers $\mathfrak{l}$ des Relativgrades $l$ [1]).

Von *Helmut Hasse* in Kiel.

Sei $l$ eine ungerade Primzahl und $k$ ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, der die $l$-te Einheitswurzel $\zeta$ enthält. Es werde nach *Hilbert* für zwei beliebige Zahlen $\alpha, \beta \neq 0$ und einen beliebigen Primteiler $\mathfrak{p}$ aus $k$ das Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ oder gleich einer noch näher zu bestimmenden, primitiven $l$-ten Einheitswurzel $\zeta$ gesetzt, je nachdem $\beta$ Normenrest des Körpers $k(\sqrt[l]{\alpha})$ nach $\mathfrak{p}$ ist oder nicht.

Ich gebe in dieser Arbeit in Fortführung meiner früher für den Fall $l = 2$ ausgeführten Untersuchungen [2]) einen *direkten* Beweis des sogenannten Zerlegungs- und Vertauschungssatzes für das Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ für den Fall, daß $\mathfrak{p}$ ein Primteiler $\mathfrak{l}$ von $l$ ist.

Während diese beiden Sätze für den Fall eines zu $l$ primen $\mathfrak{p}$ sich sowohl in der *Hilbert-Furtwängler*schen [3]) als auch in der neuerdings von Herrn *Hensel* [4]) auf Grund seiner Methoden geschaffenen Theorie des Normenrestproblems leicht aus den für das Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ geltenden Auswertungsregeln ergeben, ist dies im Falle eines Primteilers $\mathfrak{l}$ von $l$ nicht ohne weiteres der Fall. In der *Hilbert-Furtwängler*schen Theorie erscheinen für diesen Fall die genannten Sätze erst als Folge

---

[1]) Diese Arbeit bildet die Grundlage für meine beiden im vorigen Bande dieses Journals veröffentlichten Arbeiten: „Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols II“ und „Das allgemeine Reziprozitätsgesetz ...“.

[2]) *H. Hasse*, Zur Theorie des quadratischen *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Körpern, dieses Journ. Bd. 153, S. 76. Ich verweise auf die dortige Einleitung.

[3]) *Ph. Furtwängler*, Über die Reziprozitätsgesetze zwischen $l$-ten Potenzresten ..., Math. Ann. 58, S. 1.

[4]) *K. Hensel*, Über die Normenreste und Nichtreste in den allgemeinsten relativ *Abel*schen Zahlkörpern, Math. Ann. 85, S. 1.

des viel tiefer liegenden allgemeinen Reziprozitätsgesetzes $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, indem von der Gültigkeit für alle zu $l$ primen $\mathfrak{p}$ vermöge dieses Gesetzes auf die Primteiler $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}$ von $l$ geschlossen wird. Ich werde jedoch in dieser Arbeit zeigen, daß man auch ohne Anwendung des Reziprozitätsgesetzes, allein durch Betrachtungen im Bereiche $k(\mathfrak{l})$ des Primteilers $\mathfrak{l}$ zum Ziele kommen kann.

Sieht man von dem Falle $l = 2$ ab, in dem der Vertauschungssatz trivial und der Zerlegungssatz eine leichte Folge aus ihm und dem Auswertungsgesetz ist, und den ich a. a. O. vollständig behandelt habe, so sind für ein ungerades $l$ die beiden genannten Sätze eine unentbehrliche Grundlage zur vollständigen Definition des Normenrestsymbols, d. h. zur Festlegung der oben noch unbestimmt gelassenen $l$-ten Einheitswurzel $\zeta$ im Normennichtrestfalle. In der *Hilbert-Furtwänglerschen* Theorie ist diese Festlegung bekanntlich ebenfalls nur auf Grund des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes möglich, während sich aus der hier entwickelten Methode ein Weg ergibt, zu einer vollständigen Definition des Normenrestsymbols auch für die Primteiler $\mathfrak{l}$ unabhängig vom Reziprozitätsgesetz zu gelangen. Tatsächlich reichen Vertauschungs- und Zerlegungssatz zur Definition *aller* $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ für ein bestimmtes $\mathfrak{l}$ bis auf die noch willkürlich bleibende, *einmalige* Auswahl eines bestimmten $\zeta$ aus [1]).

Die zu beweisenden Sätze sind, da ihr Nachweis, wie oben hervorgehoben, Hand in Hand mit der vollständigen Definition der Normennichtrestcharaktere geht, folgendermaßen zu formulieren:

*Die Definition der Normennichtrestcharaktere läßt sich so treffen, daß die Gleichungen*

$$\text{(Ia.)} \qquad \left(\frac{\beta_1, \alpha}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\beta_2, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\beta_1 \beta_2, \alpha}{\mathfrak{l}}\right); \left(\begin{matrix}\textit{Zerlegungssatz für die} \\ \textit{erste Komponente}\end{matrix}\right).$$

$$\text{(Ib.)} \qquad \left(\frac{\beta, \alpha_1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\beta, \alpha_2}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\beta, \alpha_1 \alpha_2}{\mathfrak{l}}\right); \left(\begin{matrix}\textit{Zerlegungssatz für die} \\ \textit{zweite Komponente}\end{matrix}\right).$$

$$\text{(II.)} \qquad \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1 \qquad ; \quad \left(\textit{Vertauschungssatz}\right)$$

*für beliebige $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$ aus $k$ richtig sind.*

Ich führe den Nachweis zuerst für (Ia.), dann für (Ib.) in dem Falle, wo beide Symbole links gleich 1 sind. Daraus weise ich leicht (II.) nach, was dann den Rest von (Ib.) nach (Ia.) sofort ergibt.

Der Primteiler $\mathfrak{l}$ von $l$ habe die Ordnung $e$, den Grad $f$, es sei $ef = m$ und $k(\mathfrak{l})$ der zu $\mathfrak{l}$ gehörige *Hensel*sche Erweiterungskörper von $k$. Dann ist „*vorläufig*" das Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ für zwei beliebige Zahlen $\alpha, \beta$ aus $k(\mathfrak{l})$ (speziell also aus $k$) so definiert, daß es gleich 1 oder $\zeta\,(\neq 1)$ gesetzt wird, je nachdem $\beta$ für den Bereich von $\mathfrak{l}$ der Relativnorm einer Zahl des Bereiches [2]) $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\alpha})$ gleich ist oder nicht, oder

---

[1]) Siehe die erste, in Anm. 1 auf S. 20 zitierte Arbeit von mir.

[2]) Dieser Bereich ist bekanntlich dann und nur dann ein Körper vom Grade $l$ über $k(\mathfrak{l})$, wenn $\alpha$ keine $l$-te Potenz in $k(\mathfrak{l})$ ist, sonst ein aus $l$ Körpern $k(\mathfrak{l})$ zusammengesetzter Ring.

wie ich kurz sagen will, *Normzahl* bzw. *Nichtnormzahl* von $k(\mathfrak{l};\ \sqrt[l]{\alpha})$ ist [1]). Dieser *vorläufige* Wert 1 oder $\zeta$ des Symbols ist gegen multiplikativ zu $\alpha$ und $\beta$ hinzutretende $l$-te Potenzen aus $k(\mathfrak{l})$ invariant. Ich setze zunächst fest, daß auch der *endgültige* Wert ungeändert bleiben soll, wenn $\alpha$ und $\beta$ mit beliebigen $l$-ten Potenzen aus $k(\mathfrak{l})$ multipliziert werden.

Der Nachweis der ausgesprochenen Behauptungen stützt sich auf das in einer gemeinsamen Arbeit von Herrn *Hensel* und mir [2]) aufgestellte Auswertungsgesetz für den vorläufigen Wert des Symbols $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right)$. Dort wurde gezeigt, daß abgesehen von dem trivialen Fall, wo $\alpha$ eine $l$-te Potenz in $k(\mathfrak{l})$ und *alle* $\beta$ aus $k(\mathfrak{l})$ Normzahlen sind, sich ein spezielles, jeweils durch $\alpha$ bedingtes Fundamentalsystem $\lambda'; \eta_1', \ldots, \eta_m'; \eta_a'$ für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l})$ [3]) angeben läßt, sodaß für ein in der Form

$$(1.) \qquad \beta = \lambda'^{d_0'} \eta_1'^{d_1'} \ldots \eta_m'^{d_m'} \eta_a'^{d_{m+1}'} \beta_0'^{l}\ (\mathfrak{l});\ (0 \leqq d_r' \leqq l-1)$$

dargestelltes $\beta$ aus $k(\mathfrak{l})$ dann und nur dann $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ ist, wenn der Exponent $d_r'$ eines bestimmten, *kritischen* Basiselementes gleich Null ist. Dieses kritische Element bestimmt sich ferner nach dem dortigen Satz 3 in folgender Weise:

Ist $\lambda; \eta_1, \ldots, \eta_m; \eta_a$ irgendein (nach steigenden Graden geordnetes) Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l})$, das für alle folgenden Betrachtungen als fest zugrundegelegt werde, und

$$(2.) \qquad \alpha = \lambda^{c_0} \eta_1^{c_1} \ldots \eta_m^{c_m} \eta_n^{c_{m+1}} \alpha_0^{l}\ (\mathfrak{l});\quad (0 \leqq c_r \leqq l-1)$$

die Darstellung von $\alpha$ durch dasselbe, so ist in den drei bekannten, abgesehen von dem trivialen Falle $\alpha = \alpha_0^l(\mathfrak{l})$ für $\alpha$ zu unterscheidenden Fällen [4]):

a.) $\alpha = \eta_a^{c_{m+1}} \alpha_0^{l}\ (\mathfrak{l});\ (c_{m+1} \not\equiv 0)$ das kritische Element: $\lambda'$,
b.) $\alpha = \lambda^{c_0} \eta_1^{c_1} \ldots \eta_m^{c_m} \eta_a^{c_{m+1}} \alpha_0^{l}\ (\mathfrak{l});\quad (c_0 \not\equiv 0)$ „ „ „ $\eta_a'$,
c.) $\alpha = \eta_r^{c_r} \cdots \eta_m^{c_m} \eta_a^{c_{m+1}} \alpha_0^{l}\ (\mathfrak{l});\quad (c_r \not\equiv 0)$ „ „ „ $\eta_r'$,

wobei sich im letzten Falle die Grade der beiden Einseinheiten $\eta_r$ und $\eta_{r'}'$ zu $\frac{el}{l-1}$ ergänzen. Ich rede im folgenden auch kurz von dem jeweils „*zu* $\alpha$ *gehörigen kritischen Element*".

Aus diesen Resultaten ergeben sich sofort die folgenden Formeln für den vorläufigen Wert des Normenrestcharakters $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right)$:

---

[1]) Da es sich bei Zugrundelegung der *Hensel*schen Erweiterungen um *wirkliche Normen*, nicht nur *Normenreste* handelt, ist die Einführung dieser Ausdrucksweise den Bezeichnungen: „*Normenreste* und *Normennichtreste*" vorzuziehen.

[2]) *K. Hensel* u. *H. Hasse*, Über die Normenreste eines relativ-zyklischen Körpers vom Primzahlgrad $l$ nach einem Primteiler $\mathfrak{l}$ von $l$, Math. Ann. 90, S. 262 ff., im folgenden zitiert mit HH.

[3]) Die Beschaffenheit eines solchen Fundamentalsystems ist in HH, S. 264 f. ausführlich erläutert.

[4]) Siehe HH, S. 266, außerdem *H. Hensel*, Die Zerlegung der Primteiler in einem auflösbaren Oberkörper, dieses Journ. Bd. 151, S. 203 ff.

$$(3.) \qquad \left(\frac{\lambda, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right) \neq 1; \ \left(\frac{\eta_r, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right) = 1; \ (r = 1, 2, \ldots, m); \ \left(\frac{\eta_a, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right) = 1;$$

denn der Exponent des zu $\eta_a$ gehörigen kritischen Elements $\lambda'$ ist unabhängig von der Wahl des Fundamentalsystems.

$$(4.) \qquad \left(\frac{\eta_a, \lambda}{\mathfrak{l}}\right) \neq 1;$$

denn die „ausgezeichnete" Einseinheit $\eta_a$ eines Fundamentalsystems ist das einzige Element des Basissystems für den Grad $\frac{el}{l-1}$, das keine $l$-te Potenz in $k(\mathfrak{l})$ ist, sodaß unter Berücksichtigung der Tatsache, daß auch alle Einseinheiten von höherem als dem $\frac{el}{l-1}$-ten Grade $l$-te Potenzen in $k(\mathfrak{l})$ sind, das zu $\lambda$ gehörige kritische Element $\eta_a'$ sich durch ein beliebiges $\eta_a$ in der Form $\eta_a' = \eta_a^c \xi^l(\mathfrak{l})$; $(1 \leqq c \leqq l-1)$ ausdrücken muß, also auch $\eta_a^c$ und somit $\eta_a$ Nichtnormzahl von $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\lambda})$ ist.

$$(5.) \quad \begin{cases} \left(\frac{\eta_s, \eta_r}{\mathfrak{l}}\right) = 1; \ (r, s = 1, 2, \ldots, m), \text{ wenn die Gradsumme der Einseinheiten } \eta_s \text{ und } \eta_r \text{ den Betrag } \frac{el}{l-1} \text{ übersteigt;} \\ \left(\frac{\eta_a, \eta_r}{\mathfrak{l}}\right) = 1; \ (r = 1, 2, \ldots m); \end{cases}$$

denn dann ist $\eta_s$ von höherem Grade als die zu $\eta_r$ gehörige kritische Einseinheit $\eta_r'$, kann also diese bei der Darstellung durch das entsprechende System $\lambda'; \eta_1', \ldots, \eta_m'; \eta_a'$ nur in $l$-ter Potenz enthalten, und dasselbe gilt für die Einseinheit $\eta_a$ vom Grade $\frac{el}{l-1}$.

Die speziellen Fundamentalsysteme $\eta'; \eta_1', \ldots, \eta_m'; \eta_a'$, die für die auf ihren Normenrestcharakter zu untersuchenden $\beta$ für die einzelnen $\alpha$ zugrundezulegen sind, lassen sich wegen der Eindeutigkeit der Darstellungen durch ein beliebiges solches Fundamentalsystem sämtlich durch mod. $l$ ganzzahlige, umkehrbare Transformationen in das ein für allemal zugrundegelegte Fundamentalsystem $\lambda; \eta_1 \ldots, \eta_m, \eta_a$ transformieren. Dabei werden die Darstellungen (1.) in ebensolche Darstellungen

$$(6.) \qquad \beta = \lambda^{d_0} \eta_1^{d_1} \ldots \eta_m^{d_m} \eta_a^{d_m+1} \beta_0^l(\mathfrak{l}); \ (0 \leqq d_s \leqq l-1)$$

übergehen und die alten Exponenten $d_r'$ mit den neuen $d_s$ durch $m+2$ lineare Kongruenzen

$$d_r' \equiv \sum_{s=0}^{m+1} p_{rs} d_s \bmod. l; \ (r = 0, 1, \ldots, m+1)$$

zusammenhängen, deren Determinante $|p_{rs}| \not\equiv 0 \bmod. l$ ist. Speziell wird also auch der Exponent des kritischen Elementes jedesmal eine bestimmte, (nicht identisch verschwindende) lineare Form mod. $l$ in den neuen Exponenten $d_s$ sein. Daher folgt:

**Satz 1.** *Ist $\lambda; \eta_1, \ldots, \eta_m; \eta_a$ ein beliebiges Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l})$, so gibt es zu jedem $\alpha(\neq \alpha_0^l(\mathfrak{l}))$ aus $k(\mathfrak{l})$ eine bestimmte, nicht identisch verschwindende Linearform*

$$L_\alpha(d_s) \equiv \sum_{s=0}^{m+1} p_s^{(\alpha)} d_s \mod l,$$

*so daß für alle und nur die* $\beta$ *aus* $k(\mathfrak{l})$ : $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ *ist, für die die Exponenten* $d_s$ *aus der Darstellung* (6.) *durch jenes System der Bedingung*

$$L_\alpha(d_s) \equiv 0 \mod l$$

*genügen.*

Daraus ergibt sich, daß im Einklang mit der vorläufigen Definition des Symbols als Normenrestcharakter 1 oder $\zeta$, sowie mit der oben getroffenen Festsetzung der Invarianz gegen $l$-te Potenzfaktoren, für $\alpha \not\equiv \alpha_0^l(\mathfrak{l})$ mit einer nicht näher bestimmten, primitiven $l$-ten Einheitswurzel

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{L_\alpha(d_s)} \tag{7.}$$

gesetzt werden kann. Gehören dann zu zwei beliebigen Zahlen $\beta_1$ und $\beta_2$ aus $k(\mathfrak{l})$ bei der Darstellung in der Form (6.) die Exponentensysteme $d_s^{(1)}$ und $d_s^{(2)}$, so ist das zu $\beta_1 \beta_2$ gehörige Exponentensystem $\equiv d_s^{(1)} + d_s^{(2)} \mod l$, und da

$$L_\alpha(d_s^{(1)}) + L_\alpha(d_s^{(2)}) \equiv L_\alpha(d_s^{(1)} + d_s^{(2)}) \mod l$$

ist, folgt aus (7.):

$$\left(\frac{\beta_1, \alpha}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\beta_2, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\beta_1 \beta_2, \alpha}{\mathfrak{l}}\right). \tag{Ia.}$$

Für den Fall $\alpha = \alpha_0^l(\mathfrak{l})$ ist diese Gleichung natürlich ebenfalls richtig. Damit ist die obige Behauptung für die Gleichung (Ia.) bewiesen und gleichzeitig eine dementsprechende Festsetzung über die Normennichtrestcharaktere gewonnen.

Faßt man den Körper $k(\mathfrak{l})$ als *Abel*sche Gruppe mit der in bezug auf die Untergruppe der $l$-ten Potenzen gebildeten Basisdarstellung (6.) seiner Elemente $\beta$ auf, so wird durch jede nicht identisch verschwindende, lineare Kongruenz

$$L(d_s) \equiv \sum_{s=0}^{m+1} p_s d_s \equiv 0 \mod l$$

eine bestimmte Untergruppe von $k(\mathfrak{l})$ vom Index $l$ definiert, so daß Satz 1 auch besagt, daß im Falle $\alpha \not\equiv \alpha_0^l(\mathfrak{l})$ die Normzahlen von $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\alpha})$ in $k(\mathfrak{l})$ eine Untergruppe vom Index $l$ bilden. Umgekehrt folgt leicht aus der Basisdarstellung (6.), daß *jede* Untergruppe von $k(\mathfrak{l})$ vom Index $l$ durch eine nicht identisch verschwindende, lineare Kongruenz mod. $l$ zwischen den Exponenten $d_s$ definiert sein muß. Nun haben zwei solche Kongruenzen $L_1(d_s) \equiv 0 \mod l$ und $L_2(d_s) \equiv 0 \mod l$ dann und nur dann vollständig identische Lösungssysteme $d_s$, wenn identisch $L_1(d_s) \equiv t L_2(d_s)$; $(t = 1, 2, .., l-1)$ ist. Da jeder der $m+2$ Koeffizienten $p_s$ in $L(d_s)$ $l$ verschiedene Werte haben kann, folgt also, daß im ganzen $\frac{l^{m+2} - 1}{l - 1}$ nicht identisch verschwindende und in ihren Lösungssystemen verschiedene Kongruenzen und folglich ebensoviele verschiedene Untergruppen von $k(\mathfrak{l})$ vom Index $l$ vorhanden sind.

Andererseits sind bekanntlich zwei Körper $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\alpha_1})$ und $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\alpha_2})$ dann und nur dann identisch, wenn $\alpha_2 = \alpha_1^t \xi^l(\mathfrak{l})$; $(t = 1, 2, \ldots, l-1)$ ist. Daher folgt

aus der Basisdarstellung (2.) von $\alpha$, daß auch genau $\frac{l^{m+2}-1}{l-1}$ verschiedene und nicht mit $k(\mathfrak{l})$ identische — $\alpha \neq \alpha_0^l(\mathfrak{l})$ — Körper $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\alpha})$ existieren.

Der Nachweis der beiden übrigen, auf S. 21 genannten Behauptungen (Ib.) und (II.) kommt dann im wesentlichen darauf hinaus, zu zeigen, daß sich jene $\frac{l^{m+2}-1}{l-1}$ verschiedenen Untergruppen von $k(\mathfrak{l})$ vom Index $l$ den $\frac{l^{m+2}-1}{l-1}$ verschiedenen Körpern $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\alpha})$ als Normzahluntergruppen gegenseitig eindeutig zuordnen lassen. Dazu ist noch zu zeigen, daß zu verschiedenen Körpern $k(\mathfrak{l}; \sqrt{\alpha})$ auch verschiedene Normzahluntergruppen in $k(\mathfrak{l})$ gehören, d. h.

**Satz 2.** *Sind $\alpha_1$ und $\alpha_2$ zwei Zahlen aus $k(\mathfrak{l})$, zwischen denen keine Relation*

(8.) $$\alpha_1^{c_1} \alpha_2^{c_2} = \xi^l(\mathfrak{l}); \quad (0 \leqq c_1, c_2 \leqq l-1, \text{ nicht beide Null})$$

*besteht, so sind die Normzahluntergruppen von $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\alpha_1})$ und $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\alpha_2})$ in $k(\mathfrak{l})$ verschieden.*

**Beweis:** Da keine Relation (8.) bestehen soll, sind die Gleichungen $x^l - \alpha_1 = 0$, $x^l - \alpha_2 = 0$ irreduzibel in $k(\mathfrak{l})$, sodaß $\mathfrak{l}$ in $k_1 = k(\sqrt[l]{\alpha_1})$ bzw. $k_2 = k(\sqrt[l]{\alpha_2})$ nur je einen Primteiler $\mathfrak{l}_1$ bzw. $\mathfrak{l}_2$ hat und die *Hensel*schen Erweiterungen $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\alpha_1}) = k_1(\mathfrak{l}_1)$ und $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\alpha_2}) = k_2(\mathfrak{l}_2)$ Körper vom Relativgrad $l$ über $k(\mathfrak{l})$ sind. Es genügt dann zu zeigen, daß wenigstens ein Element $\beta$ in $k(\mathfrak{l})$ existiert, das Normzahl etwa von $k_2(\mathfrak{l}_2)$, aber Nichtnormzahl von $k_1(\mathfrak{l}_1)$ ist. Ein solches Element resultiert auch, wenn man nur zwei Elemente $\beta_1$ und $\beta_2$ in $k(\mathfrak{l})$ angeben kann, die Normzahlen von $k_1(\mathfrak{l}_1)$ bzw. $k_2(\mathfrak{l}_2)$ sind, deren Quotient $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ aber Nichtnormzahl etwa von $k_1(\mathfrak{l}_1)$ ist; denn dann ist auch $\beta_2 = \beta_1 \frac{\beta_2}{\beta_1}$ Nichtnormzahl von $k_1(\mathfrak{l}_1)$, aber Normzahl von $k_2(\mathfrak{l}_2)$.

Zum Beweise dürfen die die Körper $k_1(\mathfrak{l}_1)$ und $k_2(\mathfrak{l}_2)$ definierenden Elemente $\alpha_1$ und $\alpha_2$ aus $k(\mathfrak{l})$ durch geeignet gewählte neue der Form $\alpha_1^{b_1} \xi_1^l$, $\alpha_2^{b_2} \xi_2^l$; ($b_1, b_2$ prim zu $l$) ersetzt werden, die ja dieselben Körper $k_1(\mathfrak{l}_1)$, $k_2(\mathfrak{l}_2)$ definieren. Auf diese Weise resultieren aus den oben auf S. 22 angegebenen drei Formen a.) b.), c.) wie in HH, S. 266 folgende drei allein zu betrachtenden Formen für $\alpha_1$ und $\alpha_2$:

a.) ausgezeichnete Einseinheit $\eta_a$,

b.) Primzahl $\lambda$,

c.) Einseinheit $\eta_h = 1 + u\lambda^h; \left(0 < h < \frac{el}{l-1}, (h, l) = 1\right)$.

Es sind also insgesamt folgende sechs Fälle zu betrachten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\alpha_1 = \eta_a^{(1)}$, $\alpha_2 = \eta_a^{(2)}$; | 4. | $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_2 = \eta_h$; |
| 2. | $\alpha_1 = \eta_a$, $\alpha_2 = \lambda$; | 5. | $\alpha_1 = \lambda_1$, $\alpha_2 = \lambda_2$; |
| 3. | $\alpha_1 = \eta_a$, $\alpha_2 = \eta_h$; | 6. | $\alpha_1 = \eta_{h_1}^{(1)}$, $\alpha_2 = \eta_{h_2}^{(2)}$. |

In den Fällen 1.—4. läßt sich der verlangte Nachweis sehr leicht erbringen, während die Fälle 5. und 6. eingehendere Betrachtungen erfordern.

1. $\alpha_1 = \eta_a^{(1)}$, $\alpha_2 = \eta_a^{(2)}$.

Dieser Fall kann sogleich ausgeschlossen werden, da, wie schon oben auf S. 23 bemerkt, zwischen zwei ausgezeichneten Einseinheiten $\eta_a^{(1)}$ und $\eta_a^{(2)}$ stets eine Relation (8.) besteht.

2. $\alpha_1 = \eta_a$, $\alpha_2 = \lambda$; 3. $\alpha_1 = \eta_a$, $\alpha_2 = \eta_h$.

Dann ist die Relativnorm $n_2(\lambda^{(2)}) = \lambda'$ einer beliebigen Primzahl $\lambda^{(2)}$ aus $k_2(\mathfrak{l}_2)$ Primzahl $\lambda'$ in $k(\mathfrak{l})$, da $\mathfrak{l}_2$ den Relativgrad 1 hat. Nach (3.), S. 23 ist aber $\lambda'$ Nichtnormzahl von $k_1(\mathfrak{l}_1)$.

4. $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_2 = \eta_h$.

Dann ist nach (4.), (5.), S. 23 jede ausgezeichnete Einseinheit $\eta_a$ Normzahl von $k_2(\mathfrak{l}_2)$, aber nicht von $k_1(\mathfrak{l}_1)$.

5. $\alpha_1 = \lambda_1$, $\alpha_2 = \lambda_2$.

Es werde dann $\lambda_2 = \lambda_1 \eta$ gesetzt, so daß $\eta$ eine Einheit aus $k(\mathfrak{l})$ ist. Denkt man sich dies $\eta$ durch ein Fundamentalsystem dargestellt, wobei man von allen $l$-ten Potenzen in $k(\mathfrak{l})$ absehen darf, so folgt unter Berücksichtigung der Annahme, daß keine Relation (8.) zwischen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ bestehen soll, daß $\eta$ in einer der beiden Formen

a) $\eta = \eta_a$,

b) $\eta = \eta_k = 1 + v\lambda_1^k$; $\left(0 < k < \frac{el}{l-1};\ (k, l) = 1\right)$

angenommen werden darf. Ich zeige in beiden Fällen, daß man zwei Zahlen $\beta_1, \beta_2$ in $k(\mathfrak{l})$ finden kann, die die auf S. 25 angegebenen Bedingungen erfüllen.

a) $\lambda_2 = \lambda_1 \eta_a$.

Dann genügen die beiden Zahlen

$$\beta_1 = \lambda_1 = n_1(\sqrt[l]{\lambda_1}),$$
$$\beta_2 = \lambda_2 = n_2(\sqrt[l]{\lambda_2}) = \lambda_1 \eta_a$$

den genannten Bedingungen; denn ihr Quotient $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \eta_a$ ist nach (4.), S. 23 Nichtnormzahl von $k_1(\mathfrak{l}_1)$.

b) $\lambda_2 = \lambda_1 \eta_k = \lambda_1(1 + v\lambda_1^k)$.

Dann sind für eine beliebige Einheit $w$ aus $k(\mathfrak{l})$ und $k' = \frac{el}{l-1} - k$, (also auch $(k', l) = 1$),

$$\beta_1 = 1 + w^l \lambda_1^{k'} = n_1(1 + w\sqrt[l]{\lambda_1^{k'}}),$$
$$\beta_2 = 1 + w^l \lambda_1^{k'} = n_2(1 + w\sqrt[l]{\lambda_2^{k'}})$$

Normzahlen von $k_1(\mathfrak{l}_1)$ bzw. $k_2(\mathfrak{l}_2)$. Ferner ist

$$\beta_2 = 1 + w^l \lambda_2^{k'} = 1 + w^l \lambda_1^{k'} \eta_k^{k'} = 1 + w^l \lambda_1^{k'} (1 + k'v\lambda_1^k + \cdots)$$
$$= 1 + w^l \lambda_1^{k'} + k'vw^l \lambda_1^{\frac{el}{l-1}} + \cdots,$$

also

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = 1 + \frac{k'vw^l \lambda^{\frac{el}{l-1}} + \cdots}{1 + w^l \lambda_1^{k'}} = 1 + k'vw^l \lambda^{\frac{el}{l-1}} + \cdots$$

eine Einseinheit desselben Grades $\frac{el}{l-1}$, den die ausgezeichnete Einseinheit $\eta_a$ eines Fundamentalsystems hat. Läßt sich also $w$ so bestimmen, daß $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ ein solches $\eta_a$ wird, so ist nach (4.), S. 23 $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ Nichtnormzahl von $k_1(\mathfrak{l}_1)$ und damit alles bewiesen.

Nun ist als ausgezeichnete Einseinheit $\eta_a$ eines Fundamentalsystems jede Einseinheit

$$\eta_a = 1 + w_0\lambda_0; \quad \left(\lambda_0 = \sqrt[l-1]{-l}\right)^l$$

geeignet, deren Hauptglied $w_0$ der Bedingung

$$s_1(w_0) \equiv w_0 + w_0^l + \cdots + w_0^{l^{l-1}} \equiv 0 \bmod. 1$$

genügt [1]), also $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ dann und nur dann ein $\eta_a$, wenn $w$ aus

$$k'vw^l \frac{\lambda_1^{\frac{el}{l-1}}}{\lambda_0} \equiv w_0 \bmod. \mathfrak{l},$$

d. h.

$$w^l \equiv \frac{w_0}{k'v} \frac{\lambda_0}{\lambda^{\frac{el}{l-1}}} \equiv \bar{v} \bmod. \mathfrak{l}$$

bestimmt wird, wo $w_0$ irgendeine Lösung der angegebenen Inkongruenz ist. Da aber stets

$$\left(\bar{v}^{l^{l-1}}\right)^l \equiv \bar{v}^{l^l} \equiv \bar{v} \bmod. \mathfrak{l}$$

ist, braucht nur

$$w \equiv \bar{v}^{l^{l-1}} \bmod. \mathfrak{l}$$

gewählt zu werden. Damit ist der verlangte Nachweis erbracht, und somit Satz 2 im vorliegenden Falle 5. vollständig bewiesen.

## 6. $\alpha_1 = \eta_{h_1}^{(1)}$, $\alpha_2 = \eta_{h_2}^{(2)}$.

In diesem letzten und schwierigsten Falle bestehen folgende Möglichkeiten:

*I. Die Grade $h_1$ und $h_2$ von $\eta_{h_1}^{(1)}$ und $\eta_{h_2}^{(2)}$ sind verschieden.*

Ist dann etwa $h_1 < h_2$, so hat die zu $\alpha_1 = \eta_{h_1}^{(1)}$ gehörige kritische Einseinheit den Grad $\frac{el}{l-1} - h_1 > \frac{el}{l-1} - h_2$, ist also nach (5.), S. 23 Normzahl von $k_2(\mathfrak{l}_2)$, nicht aber von $k_1(\mathfrak{l}_1)$.

*II. Es ist $h_1 = h_2 = h$, also $\alpha_1 = \eta_h^{(1)} = 1 + u_1\lambda^h$, $\alpha_2 = \eta_h^{(2)} = 1 + u_2\lambda^h$.*

[1]) Siehe HH., S. 264, 4., außerdem *K. Hensel*, Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen, dieses Journ. Bd. 151, S. 210 ff.

Ich behandle hier zuerst den Fall, daß zwischen den Hauptgliedern $u_1$ und $u_2$ keine Relation

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}$$

mit mod. $l$ nicht zugleich verschwindenden, rationalen $c_1, c_2$ besteht. Nach den Entwicklungen von HH, S. 277 [1]) haben die zu $\alpha_1$ und $\alpha_2$ gehörigen kritischen Einseinheiten die Form:

$$\left.\begin{aligned}\eta_1' &= 1 + u_1' \lambda^{h'} \\ \eta_2' &= 1 + u_2' \lambda^{h'}\end{aligned}\right\}; \quad \left(h + h' = \frac{el}{l-1}\right),$$

wo $u_1'$ bzw. $u_2'$ irgendwelche, von den a. a. O. auftretenden $f-1$ Einheiten $w_i^l u_1^{l-1} - w_i \omega^g$ bzw. $w_i^l u_2^{l-1} - w_i \omega^g$ mod. $\mathfrak{l}$ linear unabhängige Einheiten aus $k(\mathfrak{l})$ sind. Ich zeige, daß man auf Grund der gemachten Annahme über $u_1$ und $u_2$ die Einheit $u_1'$ zudem so wählen kann, daß sie von den zweiten $f-1$ Einheiten $w_i^l u_2^{l-1} - w_i \omega^g$ mod. $\mathfrak{l}$ linear abhängig ist. Ist dies gezeigt, so ist das mit diesem $u_1'$ gebildete, zu $\alpha_1$ gehörige kritische Element $\eta_1' = 1 + u_1' \lambda^{h'}$, das Nichtnormzahl von $k_1(\mathfrak{l}_1)$ ist, Normzahl von $k_2(\mathfrak{l}_2)$, da es bei der Darstellung durch das Basissystem für den Grad $h'$:

$$1 + (w_i^l u_2^{l-1} - w_i \omega^g) \lambda^{h'} + \cdots; \quad \eta_2' = 1 + u_2' \lambda^{h'}; \quad (i = 1, 2, \ldots, f-1),$$

das nach der Vorschrift von HH zur Entscheidung über den Normenrestcharakter für $k_2(\mathfrak{l}_2)$ gebildet ist, wegen der Bestimmung von $u_1'$ nur die ersten $f-1$ Basiselemente erfordert, also bei der Darstellung durch das vollständige, zu $k_2(\mathfrak{l}_2)$ gehörige Fundamentalsystem dessen kritisches Element $\eta_2'$ nicht enthält. Damit ist dann alles bewiesen.

Um die Möglichkeit der angegebenen Bestimmung von $u_1'$ einzusehen, bemerke ich, daß dann und nur dann eine Einheit

$$u \text{ von den } w_i u_1^{l-1} - w_i \omega^g; \quad (i = 1, 2, \ldots, f-1)$$

mod. $\mathfrak{l}$ linear abhängig ist, wenn dasselbe für

$$\frac{u u_1}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}} \text{ von den } \left(\frac{w_i u_1}{\omega^{\frac{g}{l-1}}}\right)^l - \left(\frac{w_i u_1}{\omega^{\frac{g}{l-1}}}\right)$$

gilt. Das letztere ist aber nach der auf S. 27, Anm. 1 zitierten Bemerkung von Herrn *Hensel* dann und nur dann der Fall, wenn die Kongruenz besteht [2]):

$$(9.)\quad s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{u u_1}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right) \equiv u \frac{u_1}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}} + u^l \left(\frac{u_1}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right)^l + \cdots + u^{l^{f-1}} \left(\frac{u_1}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right)^{l^{f-1}} \equiv s_1(u) \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}.$$

Ebenso ist zur Abhängigkeit eines $u$ von der zweiten Reihe $w_i^l u_2^{l-1} - w_i \omega^g$ das Bestehen der Kongruenz:

$$(10.)\quad s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{u u_2}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right) \equiv u \frac{u_2}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}} + u^l \left(\frac{u_2}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right)^l + \cdots + u^{l^{f-1}} \left(\frac{u_2}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right)^{l^{f-1}} \equiv s_2(u) \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}$$

---

[1]) Die dortigen Bezeichnungen werden sinngemäß übernommen.

[2]) Hieraus folgt unmittelbar, daß für ein $\gamma = 1 + u\lambda^{h'}$ dann und nur dann $\left(\frac{\gamma, \alpha_1}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ ist, wenn $s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{u u_1}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right) \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}$, d. h. auch mod. $l$ ist, wie es in der zweiten der a. S. 20, Anm. 1. zitierten Arbeiten von mir benutzt wird.

notwendig und hinreichend. Die Kongruenz $s_\mathfrak{l}(w) \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}$ hat, wie Herr *Hensel* a. a. O. gezeigt hat, genau $l^{l-1} \bmod \mathfrak{l}$ inkongruente Lösungen $w$, zerfällt also in $k(\mathfrak{l})$ in $l^{l-1}$ Linearfaktoren. Dasselbe gilt mithin auch von den Kongruenzen $s_1(u) \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}$ und $s_2(u) \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}$. Wären nun die sämtlichen $l^{l-1}$ Lösungen von (9.) und (10.) identisch, so wäre danach identisch in $u$ mit zwei Faktoren $v_1, v_2 \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{l}$ aus $k(\mathfrak{l})$:

$$v_1 s_1(u) \equiv v_2 s_2(u) \bmod \mathfrak{l}.$$

Durch Vergleich der ersten Koeffizienten ergibt sich, daß $v_1 = \frac{1}{u_1}$, $v_2 = \frac{1}{u_2}$ gewählt werden muß, und durch Vergleich der zweiten Koeffizienten erhielte man somit:

$$u_1^{l-1} \equiv u_2^{l-1} \bmod \mathfrak{l}.$$

Dann müßte aber $\frac{u_2}{u_1}$ einer rationalen Zahl $c \bmod \mathfrak{l}$ kongruent sein, entgegen der gemachten Annahme über $u_1$ und $u_2$. Es gibt also eine Einheit $u_1'$ die Lösung von (10.), aber nicht von (9.) ist, die also nach dem obigen die geforderte Eigenschaft hat. Damit ist in diesem Falle der Satz bewiesen.

Besteht schließlich zwischen den Hauptgliedern $u_1$ und $u_2$ von $\alpha_1$ und $\alpha_2$ eine Relation $c_1 u_1 + c_2 u_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}$, in der dann notwendig *beide* Koeffizienten $c_1, c_2 \not\equiv 0 \bmod l$ sind, so dürfen $\alpha_1^{c_1}$ und $\alpha_2^{-c_2}$ als neue, die Körper $k_1(\mathfrak{l}_1)$ und $k_2(\mathfrak{l}_2)$ definierende Elemente genommen, oder auch von vornherein $\alpha_1$ und $\alpha_2$ in der Form

$$\alpha_1 = 1 + u_1 \lambda^h, \quad \alpha_2 = 1 + u_2 \lambda^h \text{ mit } u_1 \equiv u_2 \bmod \mathfrak{l}$$

vorausgesetzt werden. Es werde, ähnlich wie oben auf S. 26 im Fall 5., $\alpha_2 = \alpha_1 \eta$ gesetzt, so daß $\eta$ eine Einseinheit von höherem als dem $h$-ten Grade ist. Für $\eta$ kommen dann, da keine Relation (8.) zwischen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ bestehen soll, nur die beiden Möglichkeiten

a) $\eta = \eta_a$,

b) $\eta = \eta_{h+k} = 1 + v\lambda^{h+k}$; $\left(0 < k < \frac{el}{l-1} - h = h',\ (h+k, l) = 1\right)$

in Frage. Ich weise in beiden Fällen wieder die Existenz zweier Zahlen $\beta_1, \beta_2$ aus $k(\mathfrak{l})$ mit den oben auf S. 25 angegebenen Eigenschaften nach.

a) $\alpha_2 = \alpha_1 \eta_a$.

Hier erfüllen die beiden Zahlen

$$\beta_1 = n_1 (1 - \sqrt[l]{a_1}) = 1 - a_1 = -u_1 \lambda^h,$$
$$\beta_2 = n_2 (1 - \sqrt[l]{a_2}) = 1 - a_2 = -u_2 \lambda^h,$$

deren Quotient

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{u_2}{u_1}$$

ist, die gestellten Forderungen. Wird nämlich, wie oben, $\eta_a$ in der Form

$$\eta_a = 1 + w_0 \lambda_0; \quad (\lambda_0 = \sqrt[l-1]{-l}^{\,l};\ s_\mathfrak{l}(w_0) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{l})$$

angesetzt, so wird

$$\alpha_2 = 1 + u_2 \lambda^h = \alpha_1 \eta_a = (1 + u_1 \lambda^h)\ (1 + w_0 \lambda_0) = 1 + u_1 \lambda^h + w_0 \lambda_0 + \cdots,$$

also

$$u_2 = u_1 + w_0 \frac{\lambda_0}{\lambda^h} + \cdots,$$

und jener Quotient

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{u_2}{u_1} = 1 + \frac{w_0}{u_1}\frac{\lambda_0}{\lambda^h} + \cdots$$

eine Einseinheit vom Grade $\dfrac{el}{l-1} - h = h'$. Diese Einseinheit läßt sich weiter so schreiben:

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = 1 + \frac{w_0}{u_1}\frac{\lambda_0}{\lambda^{\frac{el}{l-1}}}\lambda^{h'} + \cdots.$$

Die zu $a_1$ gehörige kritische Einseinheit $\eta_1' = 1 + u_1'\lambda^{h'}$ ist nun, wie oben auf S. 28 entwickelt, dadurch charakterisiert, daß ihr Hauptglied $u_1'$ der Inkongruenz

$$s_\mathfrak{l}\left(\frac{u_1' u_1}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right) \not\equiv 0 \mod \mathfrak{l}$$

genügen muß. Man erkennt dann sofort, daß das Hauptglied $\dfrac{w_0}{u_1}\dfrac{\lambda_0}{\lambda^{\frac{el}{l-1}}}$ von $\dfrac{\beta_2}{\beta_1}$ dieser Bedingung genügt. Denn unter Berücksichtigung von

$$\lambda_0 = \sqrt[l-1]{-l^l} = \lambda^{\frac{el}{l-1}}\omega^{\frac{gl}{l-1}} + \cdots,$$

(so war $g$ definiert, HH, S. 264), folgt:

$$s_\mathfrak{l}\left(\frac{w_0}{u_1}\frac{\lambda_0}{\lambda^{\frac{el}{l-1}}}\frac{u_1}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right) \equiv s_\mathfrak{l}(w_0) \not\equiv 0 \mod \mathfrak{l}.$$

$\dfrac{\beta_2}{\beta_1}$ ist also als kritische Einseinheit zu $a_1$ geeignet und daher Nichtnormzahl von $k_1(\mathfrak{l}_1)$, womit alles bewiesen ist.

b) $a_2 = a_1\eta_{h+k} = a_1(1 + v\lambda^{h+k})$; $\left(0 < k < \dfrac{el}{l-1} - h = h',\ (h+k, l) = 1\right)$.

---

Hier folgt aus

$$a_2 = 1 + u_2\lambda^h = a_1\eta_{h+k} = (1 + u_1\lambda^h)\ (1 + v\lambda^{h+k}) = 1 + u_1\lambda^h + v\lambda^{h+k} + \cdots,$$

daß

$$(11.) \qquad u_2 = u_1 + v\lambda^k + \cdots = u_1(1 + \bar{v}\lambda^k) = u_1\eta_k,$$

also $u_1$ und $u_2$ um eine Einseinheit genau vom Grade $k$ unterschieden sind. Auch hier weise ich wieder die Existenz von zwei Zahlen $\beta_1$, $\beta_2$ aus $k(\mathfrak{l})$ mit den genannten Eigenschaften nach und setze diese mit folgenden, aus HH, S. 271 übernommenen Entwicklungen an:

$$\beta_i = n_i(1 + w\lambda^s(1 - \sqrt[l]{a_i})^t) = 1 + w^l(-u_i)^t\lambda^{ht+ls} + \sum_{r=1}^{l-1} w^r\lambda^{rs}G_r(1 - \sqrt[l]{a_i});(i=1,2),$$

in denen $w$ eine noch näher zu bestimmende Einheit aus $k(\mathfrak{l})$, $t$ eine Zahl der Reihe $1, 2, \ldots, l-1$ und die $G_r(1 - \sqrt[l]{a_i})^t$ die symmetrischen Grundfunktionen von $(1 - \sqrt[l]{a_i})^t$ und seinen relativ-konjugierten bezeichnen. Wie a. a. O. dargelegt,

ist in diesen Entwicklungen das auf 1 folgende Glied $w^t(-u_i)^t \lambda^{ht+ls}$ sicher dann das Hauptglied, also die folgende $\sum_{r=1}^{l-1}$ von höherer Ordnung, wenn die ganze Zahl $s$ so bestimmt wird, daß

$$0 < ht + ls < \frac{el}{l-1} - h = h' \tag{12.}$$

ist. $G_r(1 - \sqrt[l]{a_i})^t$ ist ferner eine ganze rationale Funktion mit Koeffizienten in $k(\mathfrak{l})$ von $a_i = 1 + u_i \lambda^h$, also auch von $u_i$. Daher kann

$$\sum_{r=1}^{l-1} w^r \lambda^{rs} G_r(1 - \sqrt[l]{a_i})^t = \lambda^{ht+ls+1} G(u_i)$$

und folglich

$$\beta_i = 1 + w^t(-u_i)^t \lambda^{ht+ls} + \lambda^{ht+ls+1} G(u_i); \quad (i = 1, 2) \tag{13.}$$

gesetzt werden, wo $G(u)$ eine ganze rationale Funktion von $u$ mit Koeffizienten in $k(\mathfrak{l})$ ist. Die Koeffizienten von $G(u)$ müssen weiter *ganze* Zahlen aus $k(\mathfrak{l})$ sein. Denn die Teilbarkeit der $\sum_{r=1}^{l-1}$ durch $\lambda^{ht+ls+1}$ wurde in HH ohne irgendwelche Voraussetzungen über das Hauptglied $u$ von $a = 1 + u\lambda^h$, also für *unbestimmt variables* $u$ hergeleitet, so daß $G(u)$ dann und nur dann ganz ist, wenn alle Koeffizienten ganz sind.

Ich wähle nun speziell $t$ und $s$ so, daß

$$ht + ls = h' - k = \frac{el}{l-1} - (h + k)$$

wird, was wegen $(h' - k, l) = (h + k, l) = 1$ stets mit einem bestimmten $t$ der Reihe $1, 2, \ldots, l-1$ möglich ist, und wegen $0 < k < h'$ mit (12.) in Einklang steht. Dann folgt aus (11.) für die beiden Hauptglieder von $\beta_1$ und $\beta_2$ in (13.):

$$\begin{aligned} w^t(-u_2)^t \lambda^{h'-k} &= w^t(-u_1\eta_k)^t \lambda^{h'-k} = w^t(-u_1)^t \lambda^{h'-k}(1 + \bar{v}\lambda^k)^t \\ &= w^t(-u_1)^t \lambda^{h'-k}(1 + t\bar{v}\lambda^k + \cdots) \\ &= w^t(-u_1)^t \lambda^{h'-k} + tw^t(-u_1)^t \bar{v} \lambda^{h'} + \cdots. \end{aligned}$$

Für die weiteren Glieder von $\beta_1$ und $\beta_2$ in (13.) folgt ferner aus der nach (11.) bestehenden Kongruenz

$$u_2 \equiv u_1 \mod \mathfrak{l}^k$$

und der Ganzzahligkeit der Koeffizienten von $G(u)$:

$$G(u_2) \equiv G(u_1) \mod \mathfrak{l}^k,$$

also

$$\lambda^{h'-k+1} G(u_2) \equiv \lambda^{h'-k+1} G(u_1) \mod \mathfrak{l}^{h'+1}.$$

Daher resultieren folgende Entwicklungen von $\beta_1$ und $\beta_2$:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1 + w^t(-u_1)^t \lambda^{h'-k} + G(u_1)\lambda^{h'-k+1} + (\lambda^{h'+1}), \\ \beta_2 &= 1 + w^t(-u_1)^t \lambda^{h'-k} + G(u_1)\lambda^{h'-k+1} + tw^t(-u_1)^t \bar{v}\lambda^{h'} + (\lambda^{h'+1}), \end{aligned}$$

wo durch $(\lambda^{h'+1})$ symbolisch Glieder von höherer Ordnung als $h'$ angedeutet werden. Daraus ergibt sich für den Quotienten $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ die Entwicklung:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_2}{\beta_1} &= 1 + \frac{tw^t(-u_1)^t \bar{v}\lambda^{h'} + (\lambda^{h'+1})}{1 + w^t(-u_1)^t \lambda^{h'-k} + G(u_1)\lambda^{h'-k+1} + (\lambda^{h'+1})} \\ &= 1 + tw^t(-u_1)^t \bar{v}\lambda^{h'} + (\lambda^{h'+1}). \end{aligned}$$

$\frac{\beta_2}{\beta_1}$ ist also eine Einseinheit des kritischen Grades $h' = \frac{el}{l-1} - h$. Ist dann $\eta_1' = 1 + u_1' \lambda^{h'}$ eine zu $a_1$ gehörige kritische Einseinheit, so bestimme ich schließlich noch $w$ so, daß das Hauptglied

$$tw^l(-u_1)^t \bar{v} \equiv u_1' \mod \mathfrak{l}$$

wird, was wie oben auf S. 27 stets möglich ist. Dann kann $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ als kritisches Element zu $a_1$ genommen werden, und ist somit Nichtnormzahl von $k_1(\mathfrak{l}_1)$, während $\beta_1$ und $\beta_2$ nach Konstruktion Normzahlen von $k_1(\mathfrak{l}_1)$ bzw. $k_2(\mathfrak{l}_2)$ sind.

Damit ist auch in diesem letzten Falle Satz 2 bewiesen.

Soll der Zerlegungssatz (Ib.) für die zweite Komponente allgemein gelten, so muß notwendig folgende Teilbehauptung desselben, die von der endgültigen Definition der Normennichtrestcharaktere nicht berührt wird, erfüllt sein, deren Richtigkeit sich nunmehr auf Grund von Satz 2 leicht herausstellen wird:

**Satz 3.** *Ist* $\left(\frac{\beta, a_1}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ *und* $\left(\frac{\beta, a_2}{\mathfrak{l}}\right) = 1$, *so ist auch für beliebige ganze Zahlen* $a_1, a_2$:

$$\left(\frac{\beta, a_1^{a_1} a_2^{a_2}}{\mathfrak{l}}\right) = 1.$$

**Beweis:** Besteht zwischen $a_1$ und $a_2$ eine Relation

(14.) $\quad a_1^{c_1} a_2^{c_2} = \xi^l(\mathfrak{l})$; $(0 \leqq c_1, c_2 \leqq l-1$, nicht beide Null),

so ist die Behauptung unmittelbar klar, da dann $a_1^{a_1} a_2^{a_2}$ entweder $l$-te Potenz in $k(\mathfrak{l})$ ist, oder denselben Körper über $k(\mathfrak{l})$ definiert, wie $a_1$ oder $a_2$. Ich darf daher annehmen, daß keine Relation (14.) besteht.

Sei dann $k_1 = k(\sqrt[l]{a_1})$, $k_2 = k(\sqrt[l]{a_2})$, $k_{12} = k(\sqrt[l]{a_1^{a_1} a_2^{a_2}})$, ferner $K = (k_1, k_2) = k(\sqrt[l]{a_1}, \sqrt[l]{a_2})$ der aus $k_1$ und $k_2$ komponierte Körper, der also $k_1$ und $k_2$ und auch jeden $k_{12}$ als Unterkörper enthält. Aus dem Nichtbestehen einer Relation (14.) folgt wieder, daß $\mathfrak{l}$ in $k_1$, $k_2$, $k_{12}$ nur je einen einzigen Primteiler $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_{12}$ hat, und daß die *Hensel*schen Erweiterungen $k_1(\mathfrak{l}_1)$, $k_2(\mathfrak{l}_2)$, $k_{12}(\mathfrak{l}_{12})$ relativ-zyklische Körper $l$-ten Grades über $k(\mathfrak{l})$ sind. Weiter ist aber auch z. B. die Gleichung $x^l - a_2 = 0$ irreduzibel in $k_1(\mathfrak{l}_1)$, da sie sonst bekanntlich in Linearfaktoren zerfallen, also $\sqrt[l]{a_2}$ zu $k_1(\mathfrak{l}_1)$ gehören und dann eine Relation (14.) zwischen $a_1$ und $a_2$ bestehen müßte (s. oben S. 24/25). Daher hat $\mathfrak{l}_1$ und somit $\mathfrak{l}$ auch in $K = k_1(\sqrt[l]{a_2})$ nur einen einzigen Primteiler $\mathfrak{L}$, und die *Hensel*sche Erweiterung $K(\mathfrak{L})$ ist ein Körper $l^2$-ten Grades über $k(\mathfrak{l})$ und relativ-zyklisch vom Grade $l$ über $k_1(\mathfrak{l}_1)$.

Die Relativnormen $N_1$ von $K(\mathfrak{L})$ nach $k_1(\mathfrak{l}_1)$ bilden dann nach dem obigen Satz 1, S. 23/24, angewendet auf den Grundkörper $k_1(\mathfrak{l}_1)$, eine Untergruppe aller Zahlen von $k_1(\mathfrak{l}_1)$ vom Index $l$, sodaß die symbolische Zerlegung in Nebengruppen:

(15.) $$k_1(\mathfrak{l}_1) = N_1 + \gamma_1 N_1 + \cdots + \gamma_1^{l-1} N_1$$

angesetzt werden kann, wobei $\gamma_1$ irgendeine Nichtnormzahl des Körpers $K(\mathfrak{L})$ in $k_1(\mathfrak{l})$ bezeichnet. Ebenso bilden die Relativnormen $n_1$ von $k_1(\mathfrak{l})$ nach $k(\mathfrak{l})$ nach

demselben Satz, angewendet auf $k(\mathfrak{l})$ als Grundkörper, eine Untergruppe aller Zahlen von $k(\mathfrak{l})$ vom Index $l$, sodaß

$$k(\mathfrak{l}) = n_1 + \gamma n_1 + \cdots + \gamma^{l-1} n_1 \tag{16.}$$

gesetzt werden kann, wobei $\gamma$ irgendeine Nichtnormzahl des Körpers $k_1(\mathfrak{l}_1)$ in $k(\mathfrak{l})$ bezeichnet. Aus (15.) folgt weiter durch Relativnormbildung nach $k(\mathfrak{l})$:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_1(N_1) + n_1(\gamma_1 N_1) + \cdots + n_1(\gamma_1^{l-1} N_1) \\ &= N \quad\; + n_1(\gamma_1)\, N + \cdots + n_1(\gamma_1^{l-1}) N \\ &= N \quad\; + \quad\; \bar{\gamma} N + \cdots + \bar{\gamma}^{l-1} N, \end{aligned}$$

wenn $N$ die Gruppe der $n_1(N_1)$, d. h. die Gruppe der Relativnormen $N$ von $K(\mathfrak{L})$ nach $k(\mathfrak{l})$ und $\bar{\gamma} = n_1(\gamma_1)$ ein Element aus $k(\mathfrak{l})$ bezeichnet. Also folgt aus (16.):

$$k(\mathfrak{l}) = \sum_{r,\,s=0}^{l-1} \gamma^r \bar{\gamma}^s N.$$

$N$ ist daher eine Untergruppe von $k(\mathfrak{l})$, die *höchstens* den Index $l^2$ hat [1]).

Nun ist jedes Element von $N$ als Relativnorm aus dem Oberkörper $K(\mathfrak{L})$ zugleich eine Relativnorm $n_1$ und $n_2$ aus den Unterkörpern $k_1(\mathfrak{l}_1)$ und $k_2(\mathfrak{l}_2)$. Daher ist $N$ Untergruppe des Gruppendurchschnitts

$$\overline{N} = (n_1, n_2).$$

Ich werde sofort zeigen, daß dieser Durchschnitt $\overline{N}$ genau den Index $l^2$ in bezug auf $k(\mathfrak{l})$ hat. Dann ist also der Index der Untergruppe $N$ von $\overline{N}$ sicher $\geqq l^2$, also nach dem Vorhergehenden genau gleich $l^2$, und es ist

$$N = \overline{N} = (n_1, n_2).$$

Daraus folgt weiter, daß jede Zahl aus $k(\mathfrak{l})$, die gleichzeitig Relativnorm $n_1$ von $k_1(\mathfrak{l}_1)$ und $n_2$ von $k_2(\mathfrak{l}_2)$ ist, auch Relativnorm $N$ von $K(\mathfrak{L})$ und somit auch Relativnorm $n_{12}$ jedes Unterkörpers $k_{12}(\mathfrak{l}_{12})$ von $K(\mathfrak{L})$ ist, womit offenbar der Satz bewiesen ist.

Der noch zu erbringende Nachweis, daß der Durchschnitt $N = (n_1, n_2)$ eine Untergruppe von $k(\mathfrak{l})$ vom Index $l^2$ ist, ergibt sich nun leicht aus Satz 2. Die Gruppen $n_1$ und $n_2$ haben ja den Index $l$ und sind durch zwei lineare Kongruenzen

$$L_1(d_s) \equiv \sum_{s=0}^{m+1} p_s^{(1)} d_s \equiv 0 \mod l,$$

$$L_2(d_s) \equiv \sum_{s=0}^{m+1} p_s^{(2)} d_s \equiv 0 \mod l$$

definiert, denen die Exponenten $d_s$ eines zu ihnen gehörigen $\beta$ aus der Darstellung (6.), S. 23 genügen müssen. Diese beiden Kongruenzen definieren offenbar dann und nur dann zusammen eine Untergruppe $\overline{N} = (n_1, n_2)$ vom Index $l^2$, wenn sie voneinander unabhängig, also die Gruppen $n_1, n_2$ verschieden sind. Das ist aber wegen des Nichtbestehens einer Relation (14.) nach Satz 2 der Fall.

Ebenso, wie der eben bewiesene Satz 3, unabhängig von der endgültigen Definition der Normennichtrestcharaktere, notwendige Vorbedingung für die Allgemeingültigkeit des Zerlegungssatzes (Ib.) für die zweite Komponente ist, ist

---

[1]) Es könnten ev. mehrere Nebengruppen $\gamma^r \bar{\gamma}^s N$ identisch sein, und zwar, wie man sofort bestätigt, nur so, daß $\bar{\gamma}$ in $N$ enthalten, also $n_1 = N$ wäre. Dann wäre der Index nur $l$.

für die Allgemeingültigkeit des Vertauschungssatzes (II.) das Erfülltsein folgender, nur auf den vorläufigen Wert des *Hilbert*schen Symbols bezüglichen Behauptungen no wendig:

**Satz 4.** *Ist* $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right) = 1$, *so ist auch* $\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$,

*ist* $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right) \neq 1$, *so ist auch* $\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right) \neq 1$.

**Beweis:** Es ist nur die erste Behauptung zu beweisen, da die zweite dann unmittelbar folgt. Dieser Nachweis ergibt sich sofort aus Satz 3. Es ist nämlich stets

$$\left(\frac{a, a}{\mathfrak{l}}\right) = 1,$$

da (für ungerades $l$!) $a = n(\sqrt[l]{a})$ ist. Sei nun $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right) = 1$. Dann ist nach dem Zerlegungssatz für die erste Komponente [1]) auch

$$\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{a, a}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\beta a, a}{\mathfrak{l}}\right) = 1,$$

und da $\left(\frac{\beta a, \beta a}{\mathfrak{l}}\right) = 1$, weiter nach Satz 3:

$$\left(\frac{\beta a, \alpha^{-1}(\beta a)^1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\beta a, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1,$$

ferner wegen $\left(\frac{\beta, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ wieder nach dem Zerlegungssatz für die erste Komponente:

$$\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1,$$

was zu beweisen war.

Ich benutze nunmehr den Vertauschungssatz

(II.) $$\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$$

zur weiteren Festlegung der Normennichtrestcharaktere, indem ich eine solche Wahl dieser Charaktere vorschreibe, daß (II.) allgemein gültig ist.

Diese Festsetzung ergibt nach Satz 4 keinen Widerspruch mit der vorläufigen Definition des Symbols und natürlich auch nicht mit der festgesetzten Invarianz gegen zu $a$ und $\beta$ hinzutretende $l$-te Potenzfaktoren aus $k(\mathfrak{l})$. Ferner kann sie auch mit den auf Grund des Zerlegungssatzes für die erste Komponente schon festgesetzten Relationen zwischen Symbolen mit gleicher zweiter Komponente nicht zum Widerspruch führen; denn stimmen die beiden zweiten Komponenten $\beta, a$ überein, so sind beide Symbole $\left(\frac{a, a}{\mathfrak{l}}\right) = 1$.

Vermöge der Festsetzung (II.) überträgt sich dann der Zerlegungssatz für die erste Komponente:

[1]) und zwar nur nach den von der Definition der Normennichtrestcharaktere unabhängigen, unmittelbar einzusehenden Teilbehauptung desselben: Normzahl × Normzahl = Normzahl. Auch die weitere Teilbehauptung: Normzahl × Nichtnormzahl = Nichtnormzahl gilt natürlich unabhängig von der Definition der Normennichtrestcharaktere.

(Ia.) $$\left(\frac{\beta_1, \alpha}{l}\right)\left(\frac{\beta_2, \alpha}{l}\right) = \left(\frac{\beta_1\beta_2, \alpha}{l}\right)$$

in bekannter Weise auf die zweite:

(Ib.) $$\left(\frac{\beta, \alpha_1}{l}\right)\left(\frac{\beta, \alpha_2}{l}\right) = \left(\frac{\beta, \alpha_1\alpha_2}{l}\right).$$

Damit sind die auf S. 21 ausgesprochenen Behauptungen vollständig bewiesen. Das Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{l}\right)$ ist nunmehr definitionsgemäß folgenden, untereinander widerspruchsfreien Bedingungen unterworfen:

*Für zwei beliebige Zahlen $\alpha$, $\beta$ aus $k(l)$ gilt:*

1. $\left(\frac{\beta, \alpha}{l}\right) = 1$ *oder* $\zeta^c$; ($\zeta$ *feste primitive* $l$-te *Einheitswurzel*, $1 \leqq c \leqq l-1$),

*je nachdem $\beta$ Normzahl von $k(l; \sqrt[l]{\alpha})$ oder nicht,*

2. $\left(\frac{\beta\beta_0^l, \alpha\alpha_0^l}{l}\right) = \left(\frac{\beta, \alpha}{l}\right)$ *für beliebige $\alpha_0, \beta_0$ aus $k(l)$,*

3. *Zerlegungssatz* (Ia.) *für die erste Komponente,*

4. *Vertauschungssatz* (II.),

aus denen

5. *Zerlegungssatz* (Ib.) *für die zweite Komponente*

folgt.

Es sei noch bemerkt, daß die bei unserer Untersuchung aus Zweckmäßigkeitsgründen vorangestellte Bedingung 2. sich unmittelbar als Spezialfall von 3. und 5. erweist, und daher bei dieser Aufzählung auch weggelassen werden darf[1]).

[1]) s. d. erste der beiden in Anm. 1, S. 20 zitierten Arbeiten, wo 2. nicht mehr mitgeführt wird.

# Über die erweiterte Umkehrung des *Abel*schen Theorems.

Von *Bernhard von Ludwig* in Berlin.

In einer *Riemann*schen Fläche vom Geschlecht $p$ für die algebraische Funktion $y$ von $x$ betrachten wir die voneinader verschiedenen Stellen $(x, y) = (a_1, \beta_1)$, $(a_2, \beta_2), \ldots (a_l, \beta_l)$ in beliebiger Anzahl und Lage, ordnen ihnen bezw. die ganzen positiven Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_l$ willkürlich zu und verstehen unter $R_\lambda(x, y)$ einen Integranden, welcher zum „Polygon" $\mathfrak{B} = (a_1, \beta_1)^{n_1} (a_2, \beta_2)^{n_2} \cdots (a_1, \beta_1)^{n_l}$ vom Grade $b = n_1 + n_2 + \cdots + n_l$ „gehört", d. h. eine rationale Funktion von $x$ und $y$ von der Beschaffenheit, daß das *Abel*sche Integral $\int R_\lambda(x, y)\, dx$ nur an den Stellen $(a_\varrho, \beta_\varrho)$, $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ unendlich werden kann und zwar höchstens von $(n_\varrho - 1)$-ter Ordnung, resp. rein logarithmisch, falls $n_\varrho = 1$ ist.

Ist dann dem *Riemann-Roch*schen Satze entsprechend, $R_\lambda(x, y)$, $(\lambda = 1, 2, \ldots b + p - 1)$ ein *vollständiges* System von linear unabhängigen Integranden, die zum Polygon $\mathfrak{B}$ gehören, derart, daß durch sie alle anderen Integranden dieser Kategorie linear und homogen mit konstanten Koeffizienten darstellbar sind, so bildet das bis auf ganzzahlige Vielfache der Perioden eintretende Verschwinden der Integralsummen $\sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)} R_\lambda(x, y)\, dx$, $(\lambda = 1, 2, \ldots b + p - 1)$, wo $n$ irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Schaar äquivalenter Stellensysteme existiert, zu welcher die Systeme $(x_k, y_k)$, $(k = 1, 2, \ldots n)$ und $(x_k', y_k')$, $(k = 1, 2, \ldots n)$ sowie ein drittes System gehören, von dem das die Stellen $(a_\varrho, \beta_\varrho)$, $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ bezw. $n_\varrho$-mal enthaltende Polygon $\mathfrak{B}$ einen Teil bildet.

Der erste Teil dieser Behauptung (die Notwendigkeit der Bedingung) ergibt sich aus dem *Abel*schen Theorem und ist bereits von *G. Humbert* (1887) und *M. Noether* (Math. Ann. 37) explizite bewiesen worden.

Der bei weitem wichtigere zweite Teil dagegen, demzufolge die genannte Bedingung für die Existenz der Schaar auch hinreicht, ist das, was man als die erweiterte Umkehrung des *Abel*schen Theorems zu bezeichnen pflegt, und wurde zum ersten Male 1898 im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von *G. Landsberg* beweislos ausgesprochen.

Am einfachsten dürfte sich die Herleitung dieses Satzes, für den auch später ein Beweis bisher nicht veröffentlicht worden ist, wohl in folgender Weise gestalten:

Aus bekannten Gründen dürfen wir hier offenbar ohne jede Beschränkung der Allgemeinheit die durch eine birationale Transformation stets verifizierbare Annahme machen, daß die Stellen $(a_\varrho, \beta_\varrho)$ weder im Unendlichen liegen, noch Verzweigungsstellen sind. Unter dieser Voraussetzung betrachten wir als „Normalsystem" das folgende System *Abel*scher Integrale:

$$u_1, u_2, \ldots u_p, \; \overset{(\varrho_\mu)}{Z}(x, y; a_\varrho, \beta_\varrho), \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2 \end{pmatrix},$$
$$\Pi(x, y; a_1, \beta_1; a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}), \; (\sigma = 1, 2, \ldots l-1).$$

Dabei bedeuten $u_1, u_2, \ldots u_p$ die $p$ Normalintegrale 1. Gattung, $\overset{(\varrho_\mu)}{Z}(x, y; a_\varrho, \beta_\varrho)$ das Normalintegral 2. Gattung von der Ordnung $\varrho_\mu$ mit dem Parameter (Unendlichkeitsstelle) $(a_\varrho, \beta_\varrho)$ und $\Pi(x, y; a_1, \beta_1; a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})$ das Normalintegral 3. Gattung mit den Parametern $(a_1, \beta_1)$, $(a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})$. An den Stellen $(a_\varrho, \beta_\varrho)$, $(a_1, \beta_1)$, $(a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})$ gelten also bezw. die Entwicklungen:

$$\overset{(\varrho_\mu)}{Z}(x, y; a_\varrho, \beta_\varrho) = \frac{\varrho_\mu!}{(x - a_\varrho)^{\varrho_\mu + 1}} + P_{\varrho, \varrho_\mu}(x - a_\varrho)$$

$$\text{und } \Pi(x, y; a_1, \beta_1; a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}) = \begin{cases} -\log(x - a_1) + P_\sigma(x - a_1) \\ \log(x - a_{\sigma+1}) + \bar{P}_\sigma(x - a_{\sigma+1}), \end{cases}$$

wenn man unter $P_{\varrho, \varrho_\mu}$, $P_\sigma$, $\bar{P}_\sigma$ entsprechende gewöhnliche Potenzreihen versteht. Wegen $p + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_l - 1) + l - 1 = p + n_1 + n_2 + \cdots + n_l - 1 = b + p - 1$ besteht unser Normalsystem aus genau $b + p - 1$ Integralen, deren Integranden der Reihe nach mit $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\ldots$ $\varphi_{b+p-1}(x, y)$ bezeichnet werden mögen. Es ist nun leicht einzusehen, daß diese linear unabhängig voneinander sind. Es folgt dies nämlich einerseits aus der linearen Unabhängigkeit der $p$ Normalintegranden 1. Gattung und andererseits daraus, daß die übrigen $b - 1$ Integranden teils in ihren Unendlichkeitsstellen voneinander abweichen, teils an der gleichen Stelle verschieden hohe Ordnungen des Unendlichwerdens aufweisen. Jede wirkliche Linearverbindung dieser $b - 1$ Funktionen muß also mindestens eine Unendlichkeitsstelle haben, da ein gegenseitiges Sichaufheben der einzelnen unendlich großen Bestandteile nach dem eben Gesagten, ausgeschlossen ist, und man übersieht sofort, daß in der Tat jeder, aus allen $b + p - 1$ Integranden gebildete lineare Ausdruck nur dann identisch verschwinden kann, wenn alle Koeffizienten einzeln Null sind. Wegen ihrer linearen Unabhängigkeit und ihrer Anzahl $b + p - 1$ bilden also diese Funktionen, da sie offenbar sämtlich zu unserem Polygon $\mathfrak{B}$ „gehören", dem *Riemann-Roch*schen Satze zufolge ebenfalls ein *vollständiges* System linear unabhängiger Integranden dieser Kategorie, und es müssen daher Beziehungen von der Form

$$(1.) \qquad R_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^{b+p-1} C_{\lambda i} \varphi_i^{(x, y)}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots b + p - 1)$$

gelten, worin die aus den Konstanten $C$ gebildete Substitutionsdeterminante $|C_{\lambda i}|_{(\lambda, i = 1, 2, \ldots b+p-1)}$ von Null verschieden ist.

Jedes der Integrale $\int R_\lambda(x, y)\, dx$ besitzt höchstens $2p + l = r$ Perioden, denn zu den Periodicitätsmoduln, die sich auf die, die *Riemann*sche Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandelnden $2p$ Querschnitte $a_\nu, b_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots p)$

beziehen, können nur noch die von den etwaigen Residualstellen $(\alpha_1, \beta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2)$, ... $(\alpha_l, \beta_l)$ von $R_\lambda(x, y)$ herrührenden Perioden hinzutreten. Das Entsprechende gilt natürlich auch von den Normalintegralen $\int \varphi_\lambda(x, y)\, dx$, so daß wir wohlbestimmte $r$ Größen $P_{\lambda\mu}$ als Perioden von $\int R_\lambda(x, y)\, dx$ betrachten und ihnen andere, analog gebildete $r$ Größen $Q_{i\mu} (\mu = 1, 2, \ldots r)$ bezw. als Perioden von $\int \varphi_i(x, y)\, dx$ an die Seite stellen können, wofern wir nur zulassen, daß einige der $Q$ und eventuell auch einige der $P$ verschwinden. Als unmittelbare Folge der Gleichungen (1.) ergibt sich dann natürlich:

$$(2.) \qquad P_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^{b+p-1} C_{\lambda i}\, Q_{i\mu}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots b + p - 1 \\ \mu = 1, 2, \ldots r; \end{pmatrix};$$

und das unserer Voraussetzung gemäß bestehende Gleichungssystem

$$(3.) \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)} R_\lambda(x, y)\, dx = \sum_{\mu=1}^{r} m_\mu P_{\lambda\mu}. \quad (\lambda = 1, 2, \ldots b + p - 1),$$

worin die $m_\mu$ ganze rationale Zahlen sind, geht, wenn wir die Integrationswege für alle zwischen derselben Grenze genommenen Integrale übereinstimmend wählen, nach einigen, ganz einfachen Umformungen über in

$$\sum_{i=1}^{b+p-1} C_{\lambda i} \left[ \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)} \varphi_i(x, y)\, dx - \sum_{\mu=1}^{r} m_\mu\, Q_{i\mu} \right] = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots b + p - 1).$$

Wegen $|C_{\lambda i}| \neq 0$ $_{(\lambda, i = 1, 2, \ldots b+p-1)}$ muß also notwendig

$$(4.) \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)} \varphi_i(x, y)\, dx = \sum_{\mu=1}^{r} m_\mu\, Q_{i\mu}. \quad (i = 1, 2, \ldots b + p - 1)$$

sein. Durch entsprechende, für alle zwischen denselben Grenzen genommenen Integrale übereinstimmende Abänderungen der Integrationswege kann man natürlich bewirken, daß hierin die rechten Seiten verschwinden und demgemäß die folgenden Gleichungen resultieren:

$$(5.) \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)} du_\lambda = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

$$(6.) \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)\ (\varrho\mu)} dZ\ (x, y; \alpha_\varrho, \beta_\varrho) = 0, \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2 \end{pmatrix}$$

$$(7.) \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)} d\ \Pi(x, y; \alpha_1, \beta_1; \alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}) = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots l - 1).$$

Aus der gewöhnlichen Umkehrung des *Abel*schen Theorems (für Integrale 1. Gattung) folgt nun aus (5.) die Existenz einer rationalen Funktion $R(x, y)$ von $x$ und $y$, welche an den Stellen $(x_k, y_k)$, $(k = 1, 2, \ldots n)$ von erster Ordnung verschwindet, an den Stellen $(x_k', y_k')$ von erster Ordnung unendlich wird, (wobei jedoch diese Ordnungszahlen, falls einige der genannten Stellen vereinigt liegen, bis zur Anzahl dieser Null- oder Unendlichkeitsstellen ansteigen), und sonst überall einen endlichen, von Null verschiedenen Wert besitzt.

Wendet man das *Abel*sche Theorem unter Zugrundelegung dieser Funktion auf ein beliebiges *Abel*sches Integral $J$ an, das an den Querschnitten die Perioden

$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_{2p}$ besitzt, und dessen Unendlichkeitsstellen die Stellen $(a_1, \beta_1)$, $(a_2, \beta_2), \ldots (a_l, \beta_l)$ sind, an denen der Integrand $\frac{dJ}{dx}$ bezw. die Residuen $R_1, R_2, \ldots R_l$ haben möge, so ergibt sich bekanntlich

$$(8.)\quad \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)} dJ = \sum_{\lambda=1}^{2p} r_\lambda \Omega_\lambda + 2\pi i \sum_{\mu=1}^{l} r^{(\mu)} R_\mu + \Sigma \operatorname{Resid}\left[\frac{dJ}{dx} \log R(x, y)\right].$$

Hierin hat sich die letzte Summe auf alle Residuen zu erstrecken, welche die Funktion $\frac{dJ}{dx} \log R(x, y)$ an den genannten Stellen $(a_1, \beta_1)$, $(a_2, \beta_2), \ldots (a_1, \beta_2)$ besitzt, während die $r_\lambda$ und $r^{(\mu)}$ ganze rationale Zahlen bedeuten, die lediglich von den Integrationswegen abhängen, vom Integranden $\frac{dJ}{dx}$ aber völlig unabhängig sind. Vorausgesetzt ist dabei nur, daß $R(x, y)$ an den Stellen $(a_1, \beta_1)$, $(a_2, \beta_2), \ldots (a_l, \beta_l)$ nur endliche von Null verschiedene Werte annimmt, eine Bedingung, die wir von vornherein als erfüllt betrachten, denn im Sinne unserer ursprünglichen Voraussetzung (3.) nehmen wir natürlich an, daß die Stellen $(x_k, y_k)$, $(x_k', y_k')$ nicht mit den Unendlichkeitsstellen $(a_1, \beta_1)$, $(a_2, \beta_2), \ldots (a_l, \beta_l)$ der Integrale $\int R_\lambda(x, y)\, dx$ koinzidieren.

Will man nun das *Abel*sche Theorem (8.) für die linken Seiten von (5.), (6.), (7.) *unter Festhaltung der für diese Gleichungen geltenden Integrationswege* spezialisieren, so sind die Periodenverhältnisse der Normalintegrale an den $2p$ Querschnitten genauer zu berücksichtigen: An den $p$ Rückkehrschnitten $a_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ hat das Normalintegral erster Gattung $\int d u_\lambda$ bekanntlich die Perioden $\varepsilon_{\lambda\nu}$, wenn man $\varepsilon_{\lambda\nu} = \begin{cases} 1 \text{ für } \lambda = \nu \\ 0 \;\;,, \;\; \lambda \neq \nu \end{cases}$ definiert, während die Perioden der Normalintegrale zweiter und dritter Gattung an diesen Schnitten durchweg verschwinden. An den $p$ Querschnitten im engeren Sinne $b_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ mögen die Periodicitätsmoduln der Normalintegrale erster Gattung $\int du_\lambda$ mit $\tau_{\lambda\nu}$, die der Normalintegrale zweiter Gattung $\int dZ^{(\varrho_\mu)}(x, y; a_\varrho, \beta_\varrho)$ mit $\eta^{(\varrho)}_{\varrho_\mu, \nu}$, die der Normalintegrale dritter Gattung $\int d\,\Pi(x, y; a_1, \beta_1; a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})$ mit $\omega_{\sigma\nu}$ bezeichnet sein. Mit Rücksicht auf die angegebenen Potenzentwickelungen findet man dann leicht, daß nach dem *Abel*schen Theorem in Bezug auf $R(x, y)$, wenn man noch $\frac{d}{dx} R(x, y) = R'(x, y)$ und $\frac{d^0}{dx^0} \frac{R'(x, y)}{R(x, y)} = \frac{R'(x, y)}{R(x, y)}$ setzt,

$$(9.)\quad \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)} du_\lambda = g_\lambda + \sum_{\nu=1}^{p} g_{p+\nu} \tau_{\lambda\nu}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

$$(10.)\quad \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)} d Z^{(\varrho_\mu)}(x, y; a_\varrho, \beta_\varrho) = \sum_{\nu=1}^{p} g_{p+\nu} \eta^{(\varrho)}_{\varrho_\mu, \nu}$$
$$- \left[\frac{d^{\varrho_\mu}}{dx^{\varrho_\mu}}\left(\frac{R'(x, y)}{R(x, y)}\right)\right]_{(x, y)=(a_\varrho, \beta_\varrho)}, \quad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2 \end{pmatrix}$$

$$(11.)\quad \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k', y_k')}^{(x_k, y_k)} d\,\Pi(x, y; \alpha_1, \beta_1; \alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}) = \sum_{\nu=1}^{p} g_{p+\nu}\,\omega_{\sigma\nu} + 2\,g^{(\sigma)}\pi i + \log\frac{R(\alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})}{R(\alpha_1, \beta_1)},\quad (\sigma = 1, 2, \ldots l-1)$$

ist, worin die $g_\lambda, g_{p+\nu}, g^{(\sigma)}$ wiederum ganze rationale Zahlen bedeuten. Um ihre Werte, insoweit dies notwendig ist, zu ermitteln, denken wir uns in den $\tau_{\lambda\nu}$ durch $\tau_{\lambda\nu} = \gamma_{\lambda\nu} + i\delta_{\lambda\nu}$ das Reelle vom Imaginären gesondert und betrachten das Integral erster Gattung $u = \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda u_\lambda$ unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten $c_\lambda$ reelle Größen sind, die nicht sämtlich verschwinden. Da demgemäß $u$, welches an den Querschnitten $a_\nu, b_\nu$ offenbar bezw. die Perioden $A_\nu + i\,A_\nu' = c_\nu + i\,.\,0$ und $B_\nu + iB_\nu' = \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda \gamma_{\lambda\nu} + i\sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda \delta_{\lambda\nu}$, $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ besitzt, nicht konstant sein kann, (weil sonst die Differentiation nach $x$ zu dem, der linearen Unabhängigkeit der $p$ Normalintegranden $\frac{du_\lambda}{dx}$, $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ widersprechenden Resultate $\sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda \frac{du_\lambda}{dx} = 0$ führen würde), so muß nach einem bekannten Satze aus der Theorie der *Abel*schen Integrale erster Gattung $\sum_{\nu=1}^{p} (A_\nu B_\nu' - A_\nu' B_\nu) > 0$ sein. Im Widerspruche hierzu ergäbe sich aber, wenn die Determinante $|\delta_{\lambda\nu}|_{(\lambda, \nu=1, 2, \ldots p)}$ verschwände und demgemäß ein System der $c_\lambda$ von der verlangten Beschaffenheit derart bestimmt würde, daß $\sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda\,\delta_{\lambda\nu} = 0$, $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ ist, die Gleichung $\sum_{\nu=1}^{p} (A_\nu B_\nu' - A_\nu' B_\nu) = 0$, woraus folgt, daß die bezeichnete Determinante von Null verschieden ist. Es muß daher, da aus der Vergleichung der imaginären Teile der rechten Seiten von (5.) und (9.) die Beziehungen $0 = \sum_{\nu=1}^{p} g_{p+\nu}\,\delta_{\lambda\nu} (\lambda = 1, 2, \ldots p)$ resultieren, notwendig $g_{p+\nu} = 0$, $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ sein; aus (6.) und (10.) folgt mithin:

$$(12.)\quad \left[\frac{d^{\varrho_\mu}}{dx^{\varrho_\mu}}\left(\frac{R'(x, y)}{R(x, y)}\right)\right]_{(x,y)=(\alpha_\varrho, \beta_\varrho)} = 0,\quad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2\end{pmatrix}$$

und aus (7.) und (11.): $0 = 2g^{(\sigma)}\pi i + \log\frac{R(\alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})}{R(\alpha_1, \beta_1)}$, was beim Übergang zur Exponentialfunktion, wenn man den von Null verschiedenen, endlichen Wert $R(\alpha_1, \beta_1)$ mit $C$ bezeichnet, zu den Gleichungen

$$(13.)\qquad R(\alpha_\varrho, \beta_\varrho) = C,\ (\varrho = 1, 2, \ldots l)$$

führt.

Zu weiteren Schlüssen aus diesen Ergebnissen verhilft uns nun die durch Ausführung der Differentiationen erkennbare eigentümliche Struktur der Ableitungen $\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{R'}{R}\right)$, $(i = 1, 2, \ldots)$, welche darin besteht, daß, wie sich durch vollständige Induktion unschwer verifizieren läßt, stets

$$(14.)\quad \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{R'}{R}\right) = \frac{\frac{d^{i+1}R}{dx^{i+1}}}{R} + G_i\left(\frac{R'}{R}, \frac{d}{dx}\left(\frac{R'}{R}\right), \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{R'}{R}\right), \ldots \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\left(\frac{R'}{R}\right)\right), \; (i = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt werden kann, wo $G_i$ eine ganze rationale Funktion der angegebenen Argumente ohne konstantes Glied bedeutet, also zugleich mit den Argumenten verschwindet. Offenbar ergeben sich, da wegen (13.) $R(a_\varrho, \beta_\varrho)$ von Null verschieden ist, aus (12.) und (14.) sukzessive die Gleichungen

$$(15.)\quad \left[\frac{d^{\varrho_\mu}}{dx^{\varrho_\mu}} R(x, y)\right]_{(x,y)=(a_\varrho, \beta_\varrho)} = 0, \quad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 1, 2, \ldots n_\varrho - 1 \end{pmatrix},$$

und dies besagt in Verbindung mit (13.) nichts anderes, als daß die Funktion $R(x, y) - C$ an den Stellen $(a_\varrho, \beta_\varrho)$ mindestens von $n_\varrho$-ter Ordnung verschwindet, daß also in der Tat das Polygon $\mathfrak{B} = (a_1, \beta_1)^{n_1} (a_2, \beta_2)^{n_2} \ldots (a_l, \beta_l)^{n_l}$ einen Teil eines Stellensystems bildet, welches zugleich mit dem System der Nullstellen $(x_k, y_k)$ von $R(x, y)$ und dem System der Unendlichkeitsstellen $(x'_k, y'_k)$ von $R(x, y)$ in ein und derselben Schaar äquivalenter Stellensysteme enthalten ist, wie die erweiterte Umkehrung des *Abel*schen Theorems unter Voraussetzung der Gleichungen (3.) behauptet.

Also ist dieser Satz nunmehr vollständig bewiesen.

Aber auch seine, wie bereits erwähnt, schon früher von *Humbert* und *Noether* bewiesene Umkehrung ergibt sich sofort, wenn man bedenkt, daß die dann vorausgesetzten Gleichungen (13.) und (15.) mit Hilfe von (14.) unmittelbar zu (12.) zurückführen, so daß hier in der Umgebung von $(a_\varrho, \beta_\varrho)$ die Entwicklungen

$$\begin{cases} \log R(x, y) = \log C + (x - a_\varrho)^{n_\varrho} P^{(\varrho)}(x - a_\varrho) \\ R_\lambda(x, y) = \dfrac{C^{(\varrho)}_{\lambda, n_\varrho}}{(x - a_\varrho)^{n_\varrho}} + \dfrac{C^{(\varrho)}_{\lambda, n_\varrho - 1}}{(x - a_\varrho)^{n_\varrho - 1}} + \cdots + \dfrac{C^{(\varrho)}_{\lambda, 1}}{(x - a_\varrho)} + P^{(\varrho)}_\lambda(x - a_\varrho) \end{cases}$$

bestehen, worin die $P^{(\varrho)}(x - a_\varrho)$, $P^{(\varrho)}_\lambda(x - a_\varrho)$ gewöhnliche Potenzreihen und die $C^{(\varrho)}_\lambda$ konstante Koeffizienten bedeuten, die auch alle, oder teilweise verschwinden können; an der Stelle $(a_\varrho, \beta_\varrho)$ ergibt sich daher Resid $[R_\lambda(x, y) \log R(x, y)]$ $= C^{(\varrho)}_{\lambda, 1} \log C = \log C$ Resid $[R_\lambda(x, y)]$, sodaß, weil $C$ wegen (13.) vom Summationsbuchstaben $\varrho$ unabhängig ist, die Summe $\Sigma$ Resid $[R_\lambda(x, y) \log R(x, y)]$ nach dem Residuensatze verschwinden muß (die Vieldeutigkeit von $\log C$ spielt dabei natürlich gar keine Rolle, denn wählt man durch Hinzufügung eines ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ einen anderen Funktionszweig des Logarithmus, so bleibt der letzte Schluß offenbar vollständig in Kraft). Die Spezialisierung von (8.) für $J = \int R_\lambda(x, y)\, dx$, $(\lambda = 1, 2, \ldots b + p - 1)$ führt daher in der Tat direkt zu den Gleichungen (3.) zurück.

# Über die Integration zweier Systeme partieller Differentialgleichungen mittels der hypergeometrischen Reihen zweier Veränderlichen.

Von *Lothar Koschmieder* in Breslau.

Die *Hermite*schen Polynome

$$U_{mn}(x, y) = \frac{\partial^l p^l}{\partial x^m \partial y^n}, \quad (1.)$$ [1])

$$p = p(x, y) = 1 - x^2 - y^2, \; l = m + n$$

und die ihnen biorthogonal adjungierten $V_{mn}(x, y)$ befriedigen je ein System $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ zweier linearer homogener partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung; es glückte *Didon* [2]) durch Kunstgriffe, das allgemeine Integral jedes dieser Systeme anzugeben. Neuerdings gelangte *Appell* [3]) durch systematisches Vorgehen zu demselben Ziele mit Hilfe einer der von ihm eingeführten hypergeometrischen Reihen zweier Veränderlichen [4])

$$F_2(\lambda, \mu, \mu', \nu, \nu', u, v) = \sum_{r,s}^{0,\infty} \frac{(\lambda, r+s)\,(\mu, r)\,(\mu', s)}{(\nu, r)\,(\nu', s)\,(1, r)\,(1, s)}\, u^r v^s. \quad (2.)$$

*Ich will hier die Appelsche Reihe* (2.) *zur vollständigen Integration der beiden Systeme partieller Differentialgleichungen benutzen, denen die allgemeineren Polynome*

$$P_{mn}(x, y; \alpha) = p^{-\alpha} \frac{\partial^l p^{\alpha+l}}{\partial x^m \partial y^n} \quad (3.)$$ [5])

*mit dem beliebigen Parameter* $\alpha > -\frac{1}{2}$ *und die ihnen biorthogonal adjungierten* $Q_{mn}(x, y; \alpha)$ *genügen* [6]), und zwar auf dem Wege, den *Appell* in der unter [3]) genannten Arbeit bei dem Sonderfalle $\alpha = 0$ der *Hermite*schen Polynome einschlägt.

---

[1]) Ich unterlasse es hier und im folgenden, den willkürlichen konstanten Faktor $c_{mn}$ der zu behandelnden Polynome hinzuzufügen, solange sein Wert unerheblich ist. — vgl. [5]).

[2]) Integration des Systems $\mathfrak{U}$: Ann. Éc. Norm. (1) 5 (1868) p. 247/250; des Systems $\mathfrak{V}$: ebd. (1) 6 (1869) p. 12/16.

[3]) C. R. Acad. sc. Paris 167 (1918) p. 309/315.

[4]) Journ. math. pures appl. (3) 8 (1882) p. 173/216.

[5]) Wegen der für manche Zwecke geeigneten Wahl (22a.) der $c_{mn}$ [1]) vgl. die Abhandlung d. Verf.: Über ein Biorthogonalsystem von Polynomen zweier Veränderlichen, Math. Ann. 91 (1924) S. 62/81; *ich entnehme dieser meiner Arbeit mehrere auf die* $P_{mn}$, $Q_{mn}$ *bezügliche Ergebnisse.* — Auf die Darstellbarkeit der $P_{mn}$ durch die Reihe $F_2$ weist *Appell* a. a. O. [4]) S. 190, 213 hin.

[6]) Eine Integration derselben Systeme *ohne* jene Reihen gebe ich a. a. O. [5]) mittels des *Didon*schen Kunstgriffes.

## § 1. Vollständige Integration des *Didon*schen Gleichungssystems der Funktionen $\mathfrak{P}_{mn}$.

Die beiden partiellen Differentialgleichungen, die die Funktionen

$$\mathfrak{P}_{mn}(x, y; \alpha) = \mathfrak{P}_{mn} = \frac{\partial^l p^{\alpha+l}}{\partial x^m \partial y^n} \tag{4.}$$

erfüllen [1]), nämlich

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x \partial y} + (2\alpha + n - 2)\, x\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} - (m+1)\, y\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} + (m+1)(2\alpha + l)\,\mathfrak{P} = 0 \tag{5.}$$

usw. [2]), gehen aus dem Systeme

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial x \partial y} + 2(\alpha + l - 1)\, x\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} - y\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} + 2(\alpha + l)\,\mathfrak{S} = 0 \tag{6.}$$

usw. hervor, indem man

$$\frac{\partial^l \mathfrak{S}}{\partial x^m \partial y^n} = \mathfrak{P} \tag{7.}$$

setzt. Um das *Didonsche System* [3]) (6.) der Gleichungen (5.) zu integrieren, was ausreicht, führt man es durch den Ansatz

$$x^2 = x',\ y^2 = y' \tag{8.}$$

in die Form über

$$(x' - x'^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial x'^2} - x'y'\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial x' \partial y'} + [\tfrac{1}{2} - (\tfrac{3}{2} - \alpha - l)\, x']\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x'} - \tfrac{1}{2}\, y'\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y'} + \tfrac{1}{2}(\alpha + l)\,\mathfrak{S} = 0$$

usw. Dies aber sind die Differentialgleichungen [4]) der Funktion (2.) [5]) mit $\lambda = -\alpha - l$, $\mu = \mu' = \nu = \nu' = \frac{1}{2}$, $u = x'$, $v = y'$; die allgemeine Lösung des Systems (6.) baut sich also linear mit konstanten Koeffizienten aus den vier Größen

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}_1 = F_2(-\alpha - l, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, x^2, y^2), \quad \mathfrak{S}_2 = yF_2(\tfrac{1}{2} - \alpha - l, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, x^2, y^2), \\ &\mathfrak{S}_3 = xF_2(\tfrac{1}{2} - \alpha - l, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, x^2, y^2), \quad \mathfrak{S}_4 = xyF_2(1 - \alpha - l, 1, 1, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, x^2, y^2) \end{aligned} \tag{9.}$$

auf [6]). Die Ausdrücke (9.) gehen für $\alpha = 0$ in die von *Appell* [7]) im *Hermite*schen Falle angegebenen über.

## § 2. Ausdrücke der Lösungen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_4$ in geschlossener Form.

I. Die Reihe $\mathfrak{S}_1$ läßt sich summieren; nach (2.) ist nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \sum_{r,s}^{0,\infty} \frac{(-\alpha - l, r+s)}{(1,r)\,(1,s)}\, x^{2r}y^{2s} = \sum_{q}^{0,\infty} \frac{(-\alpha - l, q)}{(1,q)} \sum_{r+s=q} \frac{(1,q)}{(1,r)\,(1,s)}\, x^{2r}y^{2s} \\ &= \sum_{q}^{0,\infty} \frac{(-\alpha - l, q)}{(1,q)}\,(x^2 + y^2)^q = (1 - x^2 - y^2)^{\alpha+l}, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{S}_1 = p^{\alpha+l}. \tag{10.}$$

---

[1]) a. a. O. p. 42 [5]), S. 76.

[2]) „usw." bezeichnet eine zweite Gleichung, die aus der ersten durch gleichzeitige Vertauschung von $x$ mit $y$ und von $m$ mit $n$ entsteht.

[3]) Ich übernehme diese Bezeichnung von *P. Humbert*, C. R. Acad. sc. Paris 167 (1918) p. 523.

[4]) a. a. O. p. 42 [4]), S. 182.

[5]) Ebd. S. 174.

[6]) Ebd. S. 188.

[7]) a. a. O. p. 42 [3]).

Hierdurch ist die Beziehung des Schemas (9.) zu den Lösungen (4.) des Systems (5.) hergestellt.

Es sei bemerkt, daß sich das System (5.) nach der Substitution (8.) selbst als ein Sonderfall des Differentialgleichungssystems [1]) der Funktion (2.) erweist, wobei

$$\lambda = -\alpha - \frac{l}{2},\ \mu = \frac{m+1}{2},\ \mu' = \frac{n+1}{2},\ \nu = \nu' = \frac{1}{2},\ u = x',\ v = y';$$

geht man von den wie in (9.) durch das Zeichen $F_2$ ausgedrückten Lösungen des Systems (5.) nach (3.) zu den Größen $P_{mn}(x, y; \alpha)$ über, so sind diese in ihrer Darstellung durch die hypergeometrische Reihe nicht sogleich als Polynome zu erkennen. Wenn man aber die allgemeine Formel [2])

$$(11.)\quad \begin{aligned} &F_2(\lambda, \mu, \mu', \nu, \nu', u, v) \\ &= (1-u-v)^{-\lambda} F_2\Big(\lambda, \nu - \mu, \nu' - \mu', \nu, \nu', \frac{u}{u+v-1}, \frac{v}{u+v-1}\Big) \end{aligned}$$

benutzt, erhält man in der Tat die Reihen

$$P^{(1)} = p^{\frac{l}{2}} F_2\Big(-\alpha - \frac{l}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{x^2}{p}, -\frac{y^2}{p}\Big),$$

$$P^{(2)} = p^{\frac{l-1}{2}} y F_2\Big(-\alpha + \frac{1}{2} - \frac{l}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{p}, -\frac{y^2}{p}\Big),$$

$$P^{(3)} = p^{\frac{l-1}{2}} x F_2\Big(-\alpha + \frac{1}{2} - \frac{l}{2}, -\frac{m-1}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{x^2}{p}, -\frac{y^2}{p}\Big),$$

$$P^{(4)} = p^{\frac{l}{2}-1} xy F_2\Big(-a + 1 - \frac{l}{2}, -\frac{m-1}{2}, -\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{p}, -\frac{y^2}{p}\Big),$$

von denen die erste für $m \equiv 0$, $n \equiv 0$; die zweite für $m \equiv 0$, $n \equiv 1$; die dritte für $m \equiv 1$, $n \equiv 0$; die vierte für $m \equiv 1$, $n \equiv 1$ (mod. 2) abbricht wegen des negativ-ganzzahligen Wertes des zweiten und dritten Arguments.

II. a) Man kann die Lösung $\mathfrak{S}_4$ in Form eines Integrals bringen. Wendet man nämlich (11.) auf ($9_4$.) an und setzt dann

$$(12.)\quad \begin{aligned} &\frac{x^2}{p(x,y)} = \xi^2,\ \frac{y^2}{p(x,y)} = \eta^2,\ \frac{\xi^2}{\omega(\xi,\eta)} = x^2,\ \frac{\eta^2}{\omega(\xi,\eta)} = y^2, \\ &\omega(\xi,\eta) = 1 + \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{p(x,y)}, \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_4 &= \omega(\xi,\eta)^{-a-l}\, \xi\eta\, F_2(1-\alpha-l, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, -\xi^2, -\eta^2) \\ &= \omega(\xi,\eta)^{-a-l} \sum_{r,s}^{0,\infty} (-1)^{r+s} \frac{(1-a-l, r+s)}{(1,r)\,(1,s)} \frac{\xi^{2r+1}}{2r+1} \frac{\eta^{2s+1}}{2s+1}, \end{aligned}$$

$$(13.)\quad \mathfrak{S}_4 = \omega(\xi,\eta)^{-a-l} \int_0^{\xi}\int_0^{\eta} \omega(\varrho,\sigma)^{a+l-1}\, d\varrho\, d\sigma.$$

b) Eine andere, von *Didon* [3]) für $a = 0$ angegebene Umformung der Größe

---

[1]) a. a. O. p. 43 [4]).

[2]) a. a. O. p. 42 [4]), S. 197, ($26_3$).

[3]) Ann. Éc. Norm. (1) 6 (1869) p. 8/9.

$\mathfrak{S}_4$ gestattet gleichfalls die Verallgemeinerung auf beliebige Werte von $\alpha$: Es ist nach (9.)

$$\mathfrak{S}_4 = xy \sum_{r,s}^{0,\infty} \frac{(1-\alpha-l, r+s)}{(1,r)\,(1,s)} \frac{2\cdot 4\cdots 2r}{3\cdot 5\cdots(2r+1)} \frac{2\cdot 4\cdots 2s}{3\cdot 5\cdots(2s+1)} x^{2r} y^{2s}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \sum_{r,s}^{0,\infty} \frac{(1-\alpha-l, r+s)}{(1,r)\,(1,s)} (x^2 \sin\varphi^2)^r (y^2 \sin\psi^2)^s \sin\varphi \sin\psi \, d\varphi \, d\psi,$$

$$(14.)\quad \mathfrak{S}_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy(1 - x^2\sin\varphi^2 - y^2 \sin\psi^2)^{\alpha+l-1} \sin\varphi \sin\psi \, d\varphi \, d\psi.$$

## § 3. Darstellung der Lösungen $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ durch hypergeometrische Reihen *einer* Veränderlichen.

Mit Hilfe einer weiteren allgemeinen Transformationsformel [1])

$$F_2(\lambda, \mu, \mu', \nu, \nu', u, v) = (1-u)^{-\lambda} F_2\Big(\lambda, \nu-\mu, \mu', \nu, \nu', \frac{u}{u-1}, \frac{v}{1-u}\Big)$$

läßt sich $\mathfrak{S}_2$ in der Form

$$\mathfrak{S}_2 = (1-x^2)^{\alpha+l-\frac{1}{2}} y F_2\Big(\frac{1}{2} - \alpha - l, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{1-x^2}, \frac{y^2}{1-x^2}\Big),$$

also wegen

$$F_2(\lambda, 0, \mu', \nu, \nu', u, v) = F(\lambda, \mu', \nu', v)$$

durch die hypergeometrische Reihe $F$ *einer* Veränderlichen ausdrücken:

$$(15.)\quad \mathfrak{S}_2 = (1-x^2)^{\alpha+l} \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} F\Big(\frac{1}{2} - \alpha - l, 1, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{1-x^2}\Big).$$

Vertauschung der Größen $x$ und $y$ liefert die entsprechende Darstellung der Lösung $\mathfrak{S}_3$.

## § 4. Zusammenhang des ersten zu integrierenden Systems mit der Differentialgleichung der *Gegenbauer*schen Funktionen.

Führt man in dem System (6.) statt $x, y$ neue Veränderliche $u, v$ ein durch den Ansatz

$$(16.)\qquad u = x,\ v = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}},\ y = v\sqrt{1-u^2},$$

wie dies die Form der rechten Seite von (15.) nahelegt, so geht (6.) in das Gleichungspaar

$$(17a.)\ (1-u^2)^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u^2} + uv(1-u^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u \partial v} + 2(\alpha+l-1)\, u(1-u^2) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}$$
$$+ 2(\alpha+l)\, u^2 v \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + 2(\alpha+l)(1-u^2)\,\mathfrak{S} = 0,$$

$$(17b.)\ (1-v^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v^2} - uv(1-u^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\, \partial v}$$
$$+ 2[\alpha+l-1-(\alpha+l)\,u^2]\, v \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + 2(\alpha+l)(1-u^2)\,\mathfrak{S} = 0$$

---

[1]) a. a. O. p. 42 [4]), S. 197, $(26_1)$.

über. Bei dem Versuche, eine Lösung dieses Systems von der Gestalt

(18.) $$\mathfrak{S} = (1 - u^2)^{\varrho}\, \mathfrak{s}(v)$$

zu finden, zeigt sich, daß (17a.) unabhängig von der Wahl der Funktion $\mathfrak{s}(v)$ erfüllt ist, wenn der Festwert

(18a.) $$\varrho = \alpha + l$$

gesetzt wird; die Funktion $\mathfrak{s}(v)$ wird durch die Differentialgleichung (17b.) festgelegt, die dann die Form annimmt

(19.) $$(1 - v^2)\frac{d^2\mathfrak{s}}{dv^2} + 2(\alpha + l - 1)\, v\frac{d\mathfrak{s}}{dv} + 2(\alpha + l)\,\mathfrak{s} = 0.$$

Nun entsteht aus (19.) durch den Ansatz

$$\frac{d^l\mathfrak{s}}{dv^l} = \mathfrak{p}_l(v)$$

die Gleichung

$$(1 - v^2)\frac{d^2\mathfrak{p}_l}{dv^2} + 2(\alpha - 1)\, v\frac{d\mathfrak{p}_l}{dv} + (l + 1)\,(2\alpha + l)\,\mathfrak{p}_l = 0,$$

die sich bei Einführung der neuen abhängigen Veränderlichen

$$z(v) = (1 - v^2)^{-\alpha}\,\mathfrak{p}_l(v)$$

in die Differentialgleichung der *Gegenbauer*schen Polynome [1])

$$(1 - v^2)\frac{d^2z}{dv^2} - 2(\alpha + 1)\, v\frac{dz}{dv} + l(2\alpha + l + 1)\, z = 0$$

verwandelt: (19.) *ist also die Didonsche Gleichung* [2]) *der Gegenbauerschen Funktionen* $\mathfrak{p}_l(v)$.

Die Gleichung (19.) stellt bei Verwendung der unabhängigen Veränderlichen $v^2 = w$ einen Sonderfall der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$w(1 - w)\frac{d^2\mathfrak{s}}{dw^2} + [\nu - (\lambda + \mu + 1)\, w]\frac{d\mathfrak{s}}{dw} - \lambda\mu\mathfrak{s} = 0$$

dar mit den Werten $\lambda = -\alpha - l$, $\mu = \nu = \frac{1}{2}$. Zwei linear unabhängige Teillösungen derselben sind [3])

(20.) $$\mathfrak{s}_1 = F(\lambda, \mu, \nu, w) = F\Big(-\alpha - l, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{1 - x^2}\Big),$$

$$\mathfrak{s}_2 = w^{1-\nu}\, F(\lambda - \nu + 1, \mu - \nu + 1, 2 - \nu, w)$$

(21.) $$= \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}\, F\Big(\frac{1}{2} - \alpha - l, 1, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{1 - x^2}\Big).$$

Die Lösung $\mathfrak{s}_1$ führt wegen der leicht zu bestätigenden Summierung

$$\mathfrak{s}_1 = \Big(1 - \frac{y^2}{1 - x^2}\Big)^{\alpha+l}$$

zu der Lösung $\mathfrak{S}_1$ des Systems (17.) in der Form (10.) zurück, während sich aus $\mathfrak{s}_2$ unmittelbar die Lösung $\mathfrak{S}_2$ des Systems (17.) in der Gestalt (15.) ergibt.

Nachdem so *der Zusammenhang dreier der Teillösungen des Systems* (6.) *mit den Lösungen der Didonschen Gleichung* (19.) dargelegt ist, *die den Gegenbauerschen Funktionen einer Veränderlichen zugehört*, will ich von (21.) noch zu einer

[1]) Vgl. d. Verf. „Untersuchungen über *Jacobi*sche Polynome“ 1919 S. 1; S. 11, (13).
[2]) a. a. O. p. 43 [3]).
[3]) *Riemann-Weber*, Die partiellen Differentialgleichungen der mathem. Physik 2 (1912) S. 20, (2).

*Integralform der Größe* $\mathfrak{S}_2$ übergehen, in der diese bei einem andern Verfahren zur Integration des Systems (6.) auftritt [1]). Der Identität [2])

$$F(\lambda - \nu + 1, \mu - \nu + 1, 2 - \nu, w) = (1 - w)^{\nu-\lambda-\mu} F(1 - \lambda, 1 - \mu, 2 - \nu, w)$$

zufolge ist

$$\mathfrak{S}_2 = v(1 - v^2)^{\alpha+l} F(\alpha + l + 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, v^2)$$

$$= (1 - v^2)^{\alpha+l} \sum_q^{0,\infty} \frac{(\alpha + l + 1, q)}{(1, q)} \frac{v^{2q+1}}{2q + 1} = (1 - v^2)^{\alpha+l} \int_0^v \frac{dt}{(1 - t^2)^{\alpha+l+1}};$$

auch bekannte Methoden liefern eine zweite Lösung der Gleichung (19.) sofort in dieser Form. Der ihr nach (18.) zugehörigen Lösung $\mathfrak{S}_2$ kann man daher auch die Gestalt geben

$$\mathfrak{S}_2 = p(x, y)^{\alpha+l} (1 - x^2)^{\alpha+l+\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dt}{p(x, t)^{\alpha+l+1}}.$$

## § 5. Ermittelung der Koeffizienten der Polynome $Q_{mn}$.

*Appell* beschränkt sich in der Arbeit p. 42 [3]) auf die Polynome (1.); er geht in ihr auf die von ihm a. a. O. p. 42 [4]), S. 190, 213 erwähnte Darstellung der den $U_{mn} = P_{mn}(x, y; 0)$ biorthogonal adjungierten Polynome $V_{mn} = Q_{mn}(x, y; 0)$ mittels der Reihe $F_2$ nicht näher ein. Ich will im folgenden grade diese Reihe zu Bemerkungen benutzen über die Form der aus der Entwickelung

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\alpha-1} = \sum_{m,n}^{0,\infty} a^m b^n Q_{mn}(x, y; \alpha)$$

entspringenden Polynome $Q_{mn}(x, y; \alpha)$ [3]), deren System das der $P_{mn}$ biorthogonal ergänzt, sodaß das über die Fläche des Einheitskreises erstreckte Integral

$$\iint p^\alpha P_{mn} Q_{rs} \, dx \, dy = 0, \text{ wenn } (m - r)^2 + (n - s)^2 > 0,$$

hingegen

$$\text{(22.)} \qquad \iint p^\alpha P_{mn} Q_{mn} \, dx \, dy = \frac{1}{m! \, n!} \frac{\Gamma(2\alpha + l + 1)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \frac{\pi}{\alpha + l + 1}$$

ist, wenn der in $P_{mn}$ verfügbare konstante Faktor

$$\text{(22a.)} \qquad c_{mn} = \frac{(-1)^l}{2^l \, m! \, n!} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + l + 1)} \frac{\Gamma(2\alpha + l + 1)}{\Gamma(2\alpha + 1)}$$

gewählt wird [4]).

Auch die $Q_{mn}$ genügen einem System partieller Differentialgleichungen [5])

$$\text{(23.)} \qquad (1 - x^2) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 Q}{\partial x \, \partial y} - (2\alpha + n + 3) x \frac{\partial Q}{\partial x} + my \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$+ m(2\alpha + l + 2) Q = 0$$

usw., das man mit Hilfe der Substitution (12.) in der *Didon*schen Weise durch Quadraturen vollständig integrieren kann [5]). Indem ich hier bei den ursprünglichen Veränderlichen $x, y$ bleibe, verallgemeinere ich zunächst eine Bemerkung von

---

[1]) a. a. O. p. 42 [5]), S. 79.
[2]) a. a. O. p. 46 [3]), S. 21.
[3]) a. a. O. p. 42 [5]), S. 64.
[4]) Ebd. S. 63, 69.
[5]) Ebd. S. 80/81.

*Didon* [1]) über die Polynome $Q_{mn}(x, y; 0)$ dahin, daß *auch die Polynome* $Q_{mn}(x, y; a)$ *bei fester Zeigersumme* $m + n = l$ mit den Funktionen $\mathfrak{P}_{mn}(x, y; a)$ die Eigenschaft gemein haben, sich als *Teilableitungen einer und derselben Funktion* $T$ ausdrücken zu lassen; dies folgt daraus, daß dem System (23.) das folgende

$$(24.) \qquad (1 - x^2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} - (2a - l + 3)\,x\frac{\partial T}{\partial x} + ly\frac{\partial T}{\partial y} + 2l(a + 1)\,T = 0$$

usw. als *Didon*sches zugehört, in dem Sinne, daß der Ansatz

$$(25.) \qquad \frac{\partial^l T}{\partial x^n \partial y^m} = Q_{mn}$$

von (24.) zu (23.) führt.

Da die Gleichungen (24.) durch die Substitution (8.) in diejenigen der Reihe (2.) mit den Parameterwerten $\lambda = a + 1$, $\mu = \mu' = -\frac{l}{2}$, $\nu = \nu' = \frac{1}{2}$ übergehen, setzt sich die allgemeinste dem System (24.) genügende Funktion $T$ linear mit konstanten Koeffizienten aus den Größen

$$T_1 = F_2\Big(a + 1, -\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\Big),$$

$$T_2 = y\,F_2\Big(a + \frac{3}{2}, -\frac{l}{2}, -\frac{l-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\Big),$$

$$T_3 = x\,F_2\Big(a + \frac{3}{2}, -\frac{l-1}{2}, -\frac{l}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\,x^2, y^2\Big),$$

$$T_4 = xy\,F_2\Big(a + 2, -\frac{l-1}{2}, -\frac{l-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\Big)$$

zusammen. Von diesen sind nur die erste bezw. vierte bei geraden bezw. ungeraden Werten von $l$ Polynome. In der Tat nehmen die beiden, nach (2.) die Funktionen $T_1$ und $T_4$ darstellenden Doppelreihen, wenn man für gerades bezw. ungerades $l$

$$r = \frac{l}{2} - h,\ s = \frac{l}{2} - k \text{ bezw. } r = \frac{l-1}{2} - h,\ s = \frac{l-1}{2} - k;\ h + k = g$$

setzt, bis auf einen noch zu bestimmenden konstanten Faktor $C$ die gemeinsame Form

$$(26.) \qquad T = \frac{2^l}{\Gamma(a+1)} \sum_{h,k} \frac{(-1)^g\,\Gamma(a + l - g + 1)}{4^g\,h!\,k!\,(l-2h)!\,(l-2k)!}\,x^{l-2h}\,y^{l-2k}$$

an, wo $h$ und $k$ von 0 bis $\frac{l}{2}$ bezw. $\frac{l-1}{2}$ laufen.

Nachdem so das Polynom $T$ ermittelt ist, findet man aus (25.)

$$(27.) \quad Q_{mn} = \frac{2^l}{\Gamma(a+1)} \sum_{h,k} \frac{(-1)^g\,\Gamma(a + l - g + 1)}{4^g\,h!\,k!\,(m-2h)!\,(n-2k)!}\,x^{m-2h}\,y^{n-2k}.$$

Daß der genannte Faktor $C$ den Wert 1 hat, bestätigt man durch Einsetzung in (22.) mit Hilfe folgender Bemerkungen: erstens enthält $Q_{mn}$ nur ein einziges Glied $l$-ten Grades, und dieses besitzt die Form $C\,2^l\Gamma(a + l + 1)\,x^m y^n\,\Gamma(a + 1)\,m!\,n!$; zweitens wird bei Integration über die Fläche des Einheitskreises

---

[1]) Ann. Éc. Norm. (1) 6 (1869) p. 20.

$$\iint p^a P_{mn} Q_{mn}\, dx\, dy = C \frac{2^l}{m!\, n!} \frac{\Gamma(a+l+1)}{\Gamma(a+1)} \iint p^a P_{mn} x^m y^n\, dx\, dy,$$

weil $P_{mn}$ zu jedem Polynom von niederem als $l$-tem Grade orthogonal ist [1]); drittens ergibt sich auf Grund von (3.) und (22a.) als Wert des letzten Integrals, wenn $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ gesetzt wird,

$$\iint p^a P_{mn} x^m y^n\, dx\, dy = (-1)^l c_{mn} \iint p^{a+l} \frac{\partial^l (x^m y^n)}{\partial x^m\, \partial y^n}\, dx\, dy$$

$$= (-1)^l c_{mn}\, m!\, n! \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)^{a+l} r\, dr = \frac{1}{2^l} \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(2a+l+1)}{\Gamma(a+l+1)\,\Gamma(2a+1)} \frac{\pi}{a+l+1}.$$

Für $a = 0$ erhält man aus (26.), (27.) die von *Didon* [2]) in diesem Sonderfalle angegebenen Ausdrücke bis auf einen dort willkürlichen konstanten Faktor.. Man bestätigt das Ergebnis (27.), indem man das System (23.) mittels (8.) auf die Gestalt [3]) bringt, wobei $\lambda = \alpha + 1 + \frac{l}{2}$, $\mu = -\frac{m}{2}$, $\mu' = -\frac{n}{2}$, $\nu = \nu' = \frac{1}{2}$ zu setzen ist. Vier Teillösungen dieses Systems von der mehrfach beschriebenen Art sind also die Funktionen

$$Q^{(1)} = F_2\Big(a+1+\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\Big),$$

$$Q^{(2)} = y F_2\Big(a+\frac{3}{2}+\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\Big),$$

$$Q^{(3)} = x F_2\Big(a+\frac{3}{2}+\frac{l}{2}, -\frac{m-1}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\Big),$$

$$Q^{(4)} = xy F_2\Big(a+2+\frac{l}{2}, -\frac{m-1}{2}, -\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x^2, y^2\Big).$$

Von einem konstanten Faktor abgesehen, geht, je nachdem ob

$$m \equiv 0,\ n \equiv 0;\ m \equiv 0,\ n \equiv 1;\ m \equiv 1,\ n \equiv 0;\ m \equiv 1,\ n \equiv 1$$

(mod. 2) ist, die erste, zweite, dritte, vierte dieser Größen in den Ausdruck (27.) über.

---

[1]) a. a. O. p. 42 [5]), S. 73.
[2]) a. a. O. p. 48 [1]).
[3]) a. a. O. p. 43 [4]).

# Die natürliche Verallgemeinerung des *Jacobi*schen Umkehrproblems.

Von *Bernhard von Ludwig* in Berlin.

Man denke sich irgend eine algebraische Funktion $y$ von $x$ vom Geschlechte $p$ und wähle voneinander linear unabhängige rationale Funktionen $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ von $x$ und $y$ in beliebiger Anzahl $n$ völlig willkürlich aus. Bekanntlich „gehören" diese dann zu einem ganz bestimmten „Polygon" $\mathfrak{B} = (a_1, \beta_1)^{n_1} (a_2, \beta_2)^{n_2} \cdots (a_l, \beta_l)^{n_l}$ vom Grade $b = n_1 + n_2 + \cdots + n_l$; d. h. es lassen sich Stellen $(x, y) = (a_\varrho, \beta_\varrho)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ in der *Riemann*schen Fläche und ganze positive Zahlen $n_\varrho (\varrho = 1, 2, \ldots l)$ derart bestimmen, daß die *Abel*schen Integrale $\int R_\lambda(x, y)\, dx$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ nur an diesen Stellen unendlich werden können und zwar höchstens $(n_\varrho - 1)$-ter Ordnung, bezw., falls $n_\varrho = 1$ ist, rein logarithmisch, und daß andererseits auch mindestens eins unter den genannten Integralen existiert, welches an der Stelle $(\alpha_\varrho, \beta_\varrho)$ wirklich das angegebene Verhalten zeigt. Es ist dann, wenn man

$$r = \begin{cases} b + p - 1 \text{ für } b \neq 0 \\ p \text{ für } b = 0 \end{cases}$$

definiert, stets $n \leqq r$, und dem *Riemann-Roch*schen Satze gemäß lassen sich die gewählten durch Hinzufügung von $r - n$ neuen $R_\lambda$ stets zu einem *vollständigen* System linear unabhängiger Integranden $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots r)$ ergänzen, die zu dem Polygon $\mathfrak{B}$ gehören.

Im Falle $b = 0$ stellen nun die Gleichungen

$$(1.) \qquad v_\lambda = \sum_{k=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} R_\lambda(x, y)\, dx \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r)$$

bekanntlich den Ansatz des *Jacobi*schen Umkehrproblems dar, in der Voraussetzung, daß unter $(x, y) = (x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ unbegrenzt veränderliche, unter $(x, y) = (c_k, d_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ beliebig, aber fest gegebene Stellen der betreffenden *Riemann*schen Fläche zu verstehen sind, und daß die Integrationswege bei je $r$ zwischen denselben Grenzen genommenen Integralen übereinstimmen, im Übrigen aber willkürlich bleiben.

Ich habe nun gefunden, *daß der Ansatz* (1.) *auch für ganz beliebige Werte von b stets eindeutig umkehrbar bleibt*, derart daß zu jedem System der $v_\lambda$, wofern nur diese Größen wirklich unabhängig voneinander gewählt sind, ein und nur ein System

von Stellen $(x, y) = (\xi_k, \eta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ gehört, mit denen die Stellen $(x_k, y^k)$ in irgend einer Reihenfolge übereinstimmen müssen, um die Relationen (1.) bei geeigneter Verfügung über die Integrationswege zu erfüllen.

Die demnach höchst naheliegende und natürliche, von mir ins Auge gefaßte *Verallgemeinerung des Jacobischen Umkehrproblems besteht daher einfach darin, daß man in* (1.) *von der Annahme* $b = 0$ *zu beliebigen Werten von* $b$ *übergeht* (selbstverständlich mit Ausnahme von $b = 1$, da es ja logarithmisch unendlich werdende Integrale mit nur einer Unendlichkeitsstelle bekanntlich nicht gibt), und in dieser Arbeit will ich zeigen, wie sich die ausgesprochene Behauptung mit Hilfe der 1898 von *G. Landsberg* ohne Beweis veröffentlichten und in diesem Bande der Zeitschrift von mir bewiesenen Erweiterung der Umkehrung des *Abel*schen Theorems in besonders einfacher Weise begründen läßt.

Zunächst zwei einfache Vorbemerkungen:

I. Obwohl wir die unteren Integrationsgrenzen $(c_k, d_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ als fest gegeben vorausgesetzt haben, würde durch ihre nachträgliche Abänderung an der durch die Gleichungen (1.) uns gestellten Umkehrungsaufgabe nicht das Geringste modifiziert, da ja diese Änderung nur bewirkt, daß zu den Integralsummen gewisse Konstanten hinzutreten, welche, mit den unabhängigen $v_\lambda$ vereinigt, offenbar völlig belanglos sind. Schon aus diesem Grunde brauchen wir insbesondere ein Zusammenfallen der $(c_k, d_k)$ mit den Unendlichkeitsstellen $(\alpha_\varrho, \beta_\varrho)$ der Integrale $\int R_\lambda(x, y)\, dx$ gar nicht in Betracht zu ziehen, ganz abgesehen davon, daß diese Integrale bei einer derartigen Koinzidenz ja jeden Sinn verlören!

II. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Stellen $(\alpha_\varrho, \beta_\varrho)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ des Polygons $\mathfrak{B}$ weder im Unendlichen liegen noch Verzweigungsstellen sind, denn diese Annahme läßt sich bekanntlich durch birationale Transformationen, durch welche weder die eindeutige Umkehrbarkeit von (1.) noch die Zusammensetzung des für beliebige unabhängige Variable definierbaren Polygons $\mathfrak{B}$ beim Übergang zu den neuen Integranden irgendwie beeinflußt wird, stets verifizieren.

Um nun zuerst zu beweisen, daß der Ansatz (1.) für *unabhängige* $v_\lambda$ *nicht mehr als eine* Lösung besitzen kann, supponieren wir 2 Lösungen $(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ und $(x'_k, y'_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$, die, auch abgesehen von der Reihenfolge ihrer Elemente, wirklich voneinander verschieden sind. Da dann, wie sofort zu sehen, die Integralsummen $\sum_{k=1}^{r} \int_{(x_k, y_k)}^{(x'_k, y'_k)} R_\lambda(x, y)\, dx$ $(\lambda = 1, 2, \ldots r)$ bis auf ganzzahlige Vielfache der Perioden verschwinden müssen, so folgt nach der erweiterten Umkehrung des *Abel*schen Theorems die Existenz einer rationalen Funktion $R(x, y)$ von $x$ und $y$, deren Null- und Unendlichkeitsstellen bezw. mit $(x'_k, y'_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ und $(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ zusammenfallen, und die überdies so beschaffen ist, daß $R(x, y) - c$, wo $c$ eine passend gewählte Konstante bedeutet, an den Stellen $(\alpha_\varrho, \beta_\varrho)$ mindestens mit den Ordnungszahlen $n_\varrho (\varrho = 1, 2, \ldots l)$ verschwindet. Aus der Theorie der *Abel*schen Integrale ist bekannt, daß $R(x, y)$ wegen ihrer Unendlichkeitsstellen $(x_k, y_k)$ von der Form

$$R(x, y) = \sum_{\nu=1}^{r} k_\nu Z(x, y; x_\nu, y_\nu) + k_{r+1}$$

sein muß, worin $Z(x, y; x_\nu, y_\nu)$ das Normalintegral 2. Gattung bedeutet, welches an der Stelle $(x, y) = (x_\nu, y_\nu)$ erster Ordnung unendlich wird, während die $r + 1$ Konstanten $k_1, k_2, \ldots k_{r+1}$, wenn wir unter $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ die Integranden der $p$ Normalintegrale 1. Gattung verstehen, nach bekannten Sätzen die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{r} k_\nu \varphi_i(x_\nu, y_\nu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

erfüllen müssen, damit das Verschwinden der Periodizitätsmoduln für $R(x, y)$ gesichert wird.

Hierzu treten wegen $R(x, y) - c$ offenbar noch die Gleichungen

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{r} k_\nu Z(\alpha_\varrho, \beta_\varrho; x_\nu, y_\nu) + k_{r+1} - c = 0 & (\varrho = 1, 2, \ldots l) \\ \sum_{\nu=1}^{r} k_\nu Z_{\mu_\varrho}(\alpha_\varrho, \beta_\varrho; x_\nu, y_\nu) = 0 & \begin{pmatrix} \mu_\varrho = 1, 2, \ldots n_\varrho - 1 \\ \varrho = 1, 2, \ldots l \end{pmatrix} \end{cases}$$

worin zur Abkürzung $\left[\frac{d^{\mu_\varrho}}{dx^{\mu_\varrho}} Z(x, y; x_\nu, y_\nu)\right]_{(x,y)=(\alpha_\varrho, \beta_\varrho)} = Z_{\mu_\varrho}(\alpha_\varrho, \beta_\varrho; x_\nu, y_\nu)$ gesetzt ist. Wegen $p + n_1 + n_2 + \cdots + n_l = p + b = r + 1$ haben wir also genau $r + 1$ lineare homogene Gleichungen für die $r + 1$ Unbekannten $k_1, k_2, \ldots k_r, k_{r+1} - c = \overline{k}$ sodaß die Auflösungsdeterminante wegen der Existenz der Funktion $R(x, y)$ verschwinden muß. Bezeichnet man daher die $r + 1$ Ausdrücke

$Z(\alpha_\varrho, \beta_\varrho; x_\nu, y_\nu)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$, $\varphi_i(x_\nu, y_\nu)$ $(i = 1, 2, \ldots p)$,

$$Z_{\mu_\varrho}(\alpha_\varrho, \beta_\varrho; x_\nu, y_\nu) \begin{pmatrix} \mu_\varrho = 1, 2, \ldots n_\varrho - 1 \\ \varrho = 1, 2, \ldots l \end{pmatrix}$$

in dieser Reihenfolge kurz mit $F_1(x_\nu, y_\nu)$, $F_2(x_\nu, y_\nu), \ldots F_{r+1}(x, y)$, so ergibt sich die Gleichung

$$(2.) \qquad \begin{vmatrix} F_1(x_1, y_1) & \ldots F_1(x_r, y_r), & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_l(x_1, y_1) & \ldots F_l(x_r, y_r), & 1 \\ F_{l+1}(x_1, y_1), & \ldots F_{l+1}(x_r, y_r), & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{r+1}(x_1, y_1), & \ldots F_{r+1}(x_r, y_r), & 0 \end{vmatrix} = 0$$

als eine zwischen den Stellen $(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ notwendige Beziehung, die man, wenn hierin $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{r+1}$ die zu den Elementen der 1. Kolonne gehörigen Unterdeterminanten sind, offenbar auch in der Form aussprechen kann, daß die Funktion $F(x, y) = \Delta_1 F_1(x, y) + \Delta_2 F_2(x, y) + \cdots + \Delta_{r+1} F_{r+1}(x, y)$ die Nullstellen $(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ besitzen muß.

Von den Stellen $(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ sind also wegen (2.) höchstens noch $r - 1$ willkürlich wählbar, so daß vermöge (1.) die zugehörigen $r$ Größen $v_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots r)$ *als Funktionen von höchstens* $r - 1$ *willkürlichen Variablen in der Tat nicht mehr unabhängig von einander sein können.*

Der Einfachheit halber hatten wir bei dieser Herleitung stillschweigend angenommen, daß die betrachteten Stellen $(x_k, y_k)$ weder im Unendlichen liegen

noch Verzweigungsstellen sind, und daß keine zwei derselben zusammenfallen; Schwierigkeiten prinzipieller Natur können indessen bei Ausdehnung der Betrachtung auf diese Ausnahmefälle nicht eintreten, und vor allen Dingen erübrigt sich ein näheres Eingehen hierauf schon deshalb, weil die $(x_k, y_k)$, wenn sie teilweise mit einander, oder mit bestimmten singulären Stellen identisch werden, eben darum nicht mehr unabhängig von einander sind und folglich auch eine Abhängigkeit der $v_l$ involvieren, die ja hier gerade nachgewiesen werden sollte.

Ganz unerläßlich ist es dagegen, noch dem schwerwiegenden Einwand zu begegnen, daß die Gleichung (2.) vielleicht gar keine wirkliche Beziehung darstellt, da ja die Determinante der linken Seite, die wir kurz mit $\Delta$ bezeichnen wollen, identisch, d. h. für *beliebige* Stellen $(x_k, y_k)$ verschwinden könnte. Daß dies nun tatsächlich nicht der Fall ist, beweisen wir nunmehr wie folgt:

Bekanntlich lassen sich Normalintegrale 2. Gattung nach ihren Parametern (Unendlichkeitsstellen) beliebig oft differentiieren, wobei man als Ableitungen Normalintegrale 2. Gattung von entsprechend höherer Ordnung des Unendlichwerdens an der gleichen Unendlichkeitsstelle erhält; folglich sind die $F_\varrho(x_\nu, y_\nu) = Z(a_\varrho, \beta_\varrho;\ x_\nu, y_\nu)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ *analytische* Funktionen von $x_\nu$. Dasselbe gilt aber auch von den $Z_{\mu_\varrho}(a_\varrho, \beta_\varrho; x_\nu, y_\nu) = \left[\dfrac{d^{\mu_\varrho}}{dx^{\mu_\varrho}} Z(x, y; x_\nu, y_\nu)\right]_{(x,y)=(a_\varrho, \beta_\varrho)}$ $\left(\begin{matrix}\mu_\varrho = 1, 2, \ldots n_\varrho - 1\\ \varrho = 1, 2, \ldots l\end{matrix}\right)$, weil $Z(x, y; x_\nu, y_\nu)$ als analytische Funktion zweier Variablen $x, x_\nu$ betrachtet werden kann. Die $F_{l+i}(x_\nu, y_\nu) = \varphi_i(x_\nu, y_\nu)$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ endlich sind als algebraische Funktionen von $x_\nu$ natürlich gleichfalls analytisch. Die $r + 1$ analytischen Funktionen $F_1(x_\nu, y_\nu), F_2(x_\nu, y_\nu), \ldots F_{r+1}(x_\nu, y_\nu)$ sind aber auch — und dies ist hier das Entscheidende —, als Funktionen von $x_\nu$ betrachtet, linear unabhängig von einander. Dies folgt nämlich einerseits aus der linearen Unabhängigkeit der $p$ Normalintegranden 1. Gattung $F_{l+i}(x_\nu, y_\nu) = \varphi_i(x_\nu, y_\nu)$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ und andererseits daraus, daß die übrigen $r + 1 - p$ Funktionen teils in ihren Unendlichkeitsstellen $(x_\nu, y_\nu) = (\alpha_\varrho, \beta_\varrho)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ von einander abweichen, teils an der gleichen Stelle $(\alpha_\varrho, \beta_\varrho)$ verschieden hohe Ordnungen des Unendlichwerdens aufweisen. Jede wirkliche Linearverbindung dieser $r + 1 - p$ Funktionen muß also mindestens eine Unendlichkeitsstelle haben, da ein gegenseitiges Sichaufheben der einzelnen unendlich großen Bestandteile nach dem soeben Gesagten ausgeschlossen ist, und man übersieht sofort, daß jeder aus allen $r + 1$ Funktionen gebildete lineare Ausdruck nur dann für beliebige Werte von $x_\nu$ verschwinden kann, wenn alle Koeffizienten einzeln Null sind.

Wäre nun identisch $\Delta = 0$, so würde sich bei Entwickelung nach der ersten Kolonne, indem man für $(x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots (x_r\, y_r)$ ganz beliebige Stellen wählt und nur die Variabilität von $x_1$ ins Auge faßt, für $x_1$ die identische Gleichung

$$\Delta_1 F_1(x_1, y_1) + \Delta_2 F_2(x_1, y_1) + \cdots + \Delta_{r+1} F_{r+1}(x_1\, y_1) = 0$$

ergeben und auch die Unterdeterminanten $r$-ten Grades $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{r+1}$ müßten daher wegen der nachgewiesenen linearen Unabhängigkeit der Funktionen $F$ identisch verschwinden. Indem man nun die entsprechende Betrachtung mit den

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{r+1}$ anstellt und in analoger Weise immer weiter fortschreitet, findet man sukzessive, daß auch alle Determinanten $(r-1)$-ten, $(r-2)$-ten, ... 2-ten Grades, die sich bezw. aus den letzten $r-1, r-2, \ldots 2$ Kolonnen von $\Delta$ bilden lassen, identisch verschwinden müßten. Das Endergebnis wäre also das identische Verschwinden von Determinanten wie $\begin{vmatrix} F_\varrho(x_r, y_r), 1 \\ F_\sigma(x_r, y_r), 0 \end{vmatrix}$, worin $1 \leqq \varrho \leqq l$ und $l+1 \leqq \sigma \leqq r+1$ ist, und somit ein Widerspruch zu der nachgewiesenen linearen Unabhängigkeit der Funktionen $F$. $\Delta$ kann also in der Tat nicht identisch verschwinden, qu. e. d.

Mehr als eine Lösung $(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ kann also der Ansatz (1.), wie wir nunmehr wissen, nur dann ergeben, wenn die Größen $v_l$ von einander abhängig sind, und es bleibt daher nur noch übrig zu beweisen, *daß er für unabhängige* $v_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots r)$ *auch wirklich eine Lösung* $(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ *immer besitzt.*

Hierzu betrachten wir, Bezug nehmend auf unsere Vorbemerkung II, als „Normalsystem" das folgende System *Abel*scher Integrale:

$$u_1, u_2, \ldots u_p;\ Z^{(\varrho_\mu)}(x, y; a_\varrho, \beta_\varrho)\begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2 \end{pmatrix}; \Pi(x, y; a_1, \beta_1; a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})$$

$(\sigma = 1, 2, \ldots l-1)$. Dabei bedeuten $u_1, u_2, \ldots u_p$ die $p$ Normalintegrale 1. Gattung; $Z^{(\varrho_\mu)}(x, y; a_\varrho, \beta_\varrho)$ das Normalintegral 2. Gattung von der Ordnung $\varrho_\mu$ mit dem Parameter (Unendlichkeitsstelle) $(a_\varrho, \beta_\varrho)$; $\Pi(x, y; a_1, \beta_1; a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})$ das Normalintegral 3. Gattung mit den Parametern $(a_1, \beta_1)$, $(\alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})$. An den Stellen $(a_\varrho, \beta_\varrho)$, $(a_1, \beta_1)$, $(a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})$ gelten also bezw. die Entwicklungen $Z^{(\varrho_\mu)}(x, y; a_\varrho, \beta_\varrho) = \dfrac{\varrho_\mu!}{(x-a_\varrho)^{\varrho_\mu+1}}$ $+ P_{\varrho,\varrho_\mu}(x - a_\varrho)$, $\Pi(x, y; a_1 \beta_1; a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}) = \begin{cases} -\log(x-a_1) + P_\sigma(x-a_1) \\ \log(x-a_\sigma) + \bar{P}_\sigma(x-a_\sigma), \end{cases}$ wenn man unter $P_{\varrho,\varrho_\mu}, P_\sigma, \bar{P}_\sigma$ entsprechende gewöhnliche Potenzreihen versteht. Wegen $p + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_l - 1) + l - 1 = p + n_1 + n_2 + \cdots + n_l - 1 = b + p - 1$ besteht unser Normalsystem aus genau $b + p - 1$ Integralen, deren Integranden der Reihe nach mit $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots \varphi_{b+p-1}(x, y)$ bezeichnet sein mögen. Daß diese nun linear unabhängig von einander sind, folgt offenbar in genau derselben einfachen Weise, wie wir dies für die in der Determinante $\Delta$ der Gleichung (2.) auftretenden Funktionen $F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots F_{r+1}(x, y)$ bewiesen haben. Wegen ihrer linearen Unabhängigkeit und ihrer Anzahl $b + p - 1$ bilden also die $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots b + p - 1)$, da sie augenscheinlich alle zu unserem Polygon $\mathfrak{B}$ „gehören", dem *Riemann-Roch*schen Satze zufolge ein *vollständiges* System linear unabhängiger Integranden dieser Kategorie, ebenso wie dies wegen $r = b + p - 1$ mit den Funktionen $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots r)$ der Fall ist, und es müssen daher Beziehungen von der Form

$$(3.) \qquad \varphi_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^{r} C_{\lambda i} R_i(x, y) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r)$$

und

$$(4.) \qquad R_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{\lambda i} \varphi_i(x, y) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r)$$

bestehen, wobei also für die zueinander reziproken Systeme der konstanten Koeffizienten $C_{\lambda i}$ und $\gamma_{\lambda i}$ die Gleichungen

$$(5.) \qquad \sum_{i=1}^{r} \gamma_{\lambda i} C_{i\varrho} = \begin{cases} 1, & \lambda = \varrho \\ 0, & \lambda \neq \varrho \end{cases} \qquad (\lambda, \varrho = 1, 2, \ldots r)$$

erfüllt sind.

Für ein beliebig vorgegebenes System *unabhängig* von einander gewählter Werte $v_1, v_2, \ldots v_r$ definieren wir nun $r$ Größen $w_1, w_2, \ldots w_r$ durch die Gleichungen

$$(6.) \qquad w_\lambda = \sum_{i=1}^{r} C_{\lambda i} v_i \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r),$$

aus denen sich natürlich sofort auch

$$(7.) \qquad v_\lambda = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{\lambda i} w_i \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r)$$

ergibt. Von den Werten $w_1, w_2, \ldots w_r$ sollen nun in Zukunft die letzten $r - p = b - 1$ der bequemeren Schreibweise wegen gelegentlich auch mit $w_{\varrho,\varrho_\mu}\left(\begin{matrix}\varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2\end{matrix}\right)$, $w^{(\sigma)} (\sigma = 1, 2, \ldots l - 1)$ bezeichnet werden, und zwar in derselben Reihenfolge, in welcher wir auch die Ausdrücke $\varphi_{p+1}(x, y), \varphi_{p+2}(x, y), \ldots \varphi_r(x, y)$ durch Identifizierung mit den Integranden

$$\frac{d}{dx} Z^{(\varrho_\mu)}(x, y; \alpha_\varrho, \beta_\varrho)\left(\begin{matrix}\varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2\end{matrix}\right), \quad \frac{d}{dx} \Pi(x, y; \alpha_1, \beta_1; \alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}) \, (\sigma = 1, 2, \ldots l - 1)$$

den Zahlenpaaren $\varrho, \varrho_\mu$ sowie dem Index $\sigma$ zugeordnet hatten.

Dem *Jacobi*schen Umkehrproblem gemäß können wir nun nach den für die *Abel*schen Funktionen geltenden Sätzen unter allen Umständen ein System von Stellen $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ so bestimmen, daß

$$(8.) \quad -w_k = \sum_{i=1}^{r} \int_{(c_{r+i}, d_{r+i})}^{(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} du_k = \sum_{i=1}^{p} \int_{(c_{r+i}, d_{r+i})}^{(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} \varphi_k(x, y)\, dx \qquad (k = 1, 2, \ldots p)$$

ist, unter der Voraussetzung, daß $(c_{r+i}, d_{r+i})$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ lauter von den $(a_\varrho, \beta_\varrho)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ verschiedene, im Übrigen willkürlich gewählte Stellen der *Riemann*schen Fläche bedeuten. Die Annahme, die Stellen $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ könnten zum Teil mit einigen der Stellen $(c_k, d_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r + p)$ und $(a_\varrho, \beta_\varrho)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ identisch sein, würde bestimmte Beziehungen unter den $w_k (k = 1, 2, \ldots p)$ involvieren, ist also hier, wo wir diese Größen wegen der $v_\lambda$ als von einander unabhängig anzusehen haben, auszuschließen.

Für die Integrationswege, die durch die Ermittelung der $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ in (8.) bis zu einem gewissen Grade schon mitbestimmt sind, berechnen wir jetzt die offenbar endlichen Werte

$$(9.) \quad \begin{cases} \bar{w}_{\varrho,\varrho_\mu} = \sum_{i=1}^{p} \int_{(c_{r+i}, d_{r+i})}^{(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} d\, Z^{(\varrho_\mu)}(x, y; \alpha_\varrho, \beta_\varrho) & \left(\begin{matrix}\varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2\end{matrix}\right) \\ \bar{w}^{(\sigma)} = \sum_{i=1}^{p} \int_{(c_{r+i}, d_{r+i})}^{(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} d\, \Pi(x, y; \alpha_1, \beta_1; \alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}) & (\sigma = 1, 2, \ldots l - 1) \end{cases}$$

und definieren

$$(10.) \qquad S(x,y) = \sum_{\mu=1}^{r+p} k_\mu Z(x,y;c_\mu,d_\mu) + k_{r+p+1}$$

unter der Voraussetzung, daß hierin die konstanten Koeffizienten $k$, die mit den a. S. 52 in ähnlicher Weise bezeichneten Größen nichts zu tun haben, den Gleichungen

$$(\alpha.) \qquad \sum_{\mu=1}^{r+p} k_\mu \varphi_i(c_\mu,d_\mu) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots p),$$

$$(\beta.) \qquad S(\bar{x}_i,\bar{y}_i) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots p),$$

$$(\gamma.) \quad w_{\varrho,\varrho_\mu} + \bar{w}_{\varrho,\varrho_\mu} = -\left[\frac{d^{\varrho_\mu}}{dx^{\varrho_\mu}}\frac{S'(x,y)}{S(x,y)}\right]_{(x,y)=(\alpha_\varrho,\beta_\varrho)} \begin{pmatrix}\varrho = 1,2,\ldots l \\ \varrho_\mu = 0,1,2,\ldots n_\varrho - 2\end{pmatrix},$$

$$(\delta.) \qquad e^{w^{(\sigma)}+\bar{w}^{(\sigma)}} = \frac{S(\alpha_{\sigma+1},\beta_{\sigma+1})}{S(\alpha_1,\beta_1)} \qquad (\sigma = 1,2,\ldots l-1)$$

genügen, wo $S'(x,y) = \dfrac{dS(x,y)}{dx}$ und $\dfrac{d^0}{dx^0}\dfrac{S'(x,y)}{S(x,y)} = \dfrac{S'(x,y)}{S(x,y)}$ zu setzen ist. Wegen (10.) sind die Gleichungen $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\delta.)$ offenbar sämtlich linear und homogen in Bezug auf die zu ermittelnden Größen $k_1, k_2, \ldots k_{r+p+1}$; aber auch für $(\gamma.)$ gilt dasselbe, wie sich aus den durch vollständige Induktion leicht verifizierbaren Relationen:

$$\frac{d^i}{dx^i}\frac{S'}{S} = \frac{\dfrac{d^{i+1}S}{dx^{i+1}}}{S} + G_i\left(\frac{S'}{S}, \frac{d}{dx}\left(\frac{S'}{S}\right), \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{S'}{S}\right), \ldots \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\left(\frac{S'}{S}\right)\right) (i = 1,2,\ldots)$$

erkennen läßt, wo $G_i$ eine ganze rationale Funktion der angegebenen Argumente bedeutet; denn vermöge dieser Relationen geht die beliebig aus $(\gamma.)$ herausgegriffene Gleichung $w_{\varrho,\varrho_\mu} + \bar{w}_{\varrho,\varrho_\mu} = -\left[\dfrac{d^{\varrho_\mu}}{dx^{\varrho_\mu}}\left(\dfrac{S'}{S}\right)\right]_{(x,y)=(\alpha_\varrho,\beta_\varrho)}$ mit Hilfe der übrigen Gleichungen $(\gamma.)$ über in

$$\left(\frac{d^{\varrho_\mu+1}S}{dx^{\varrho_\mu+1}}\right)_{(x,y)=(\alpha_\varrho,\beta_\varrho)} + S(\alpha_\varrho,\beta_\varrho)\,[G_{\varrho_\mu}(-(w_{\varrho,0}+\bar{w}_{\varrho,0}), -(w_{\varrho,1}+\bar{w}_{\varrho,1}), \ldots$$
$$\ldots -(w_{\varrho,\varrho_\mu-1}+\bar{w}_{\varrho,\varrho_\mu-1})) + w_{\varrho,\varrho_\mu} + \bar{w}_{\varrho,\varrho_\mu}] = 0,$$

also wegen (10.) ebenfalls in eine lineare, homogene Gleichung für $k_1, k_2, \ldots k_{r+p+1}$.

Aus dem über die $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ Gesagten und aus unserer Vorbemerkung I folgt nun unmittelbar, daß die Koeffizienten der Gleichungen $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$ durchweg endliche Größen sind. Es liegt also hier ein System von $p + p + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_l - 1) + l - 1 = 2p + b - 1 = r + p$ linearen homogenen Gleichungen vor, dessen Rang daher höchstens gleich $r + p$, also sicher kleiner ist als die Anzahl der Unbekannten $k_1, k_2, \ldots k_{r+p+1}$; folglich lassen sich für diese unter allen Umständen solche die Gleichungen befriedigenden Werte ermitteln, welche nicht sämtlich verschwinden. Mit Einsetzung eines solchen Wertsystems in (10.) ergibt sich $S(x,y)$ als ein *Abel*sches Integral 2. Gattung, welches nach bekannten Sätzen wegen $(\alpha.)$ keine Perioden haben kann, folglich eine rationale Funktion von $x$ und $y$ sein muß und keine anderen Unendlichkeitsstellen als $(c_\mu, d_\mu)$ $(\mu = 1,2,\ldots r+p)$ besitzt. Außer ihren den Gleichungen $(\beta.)$ entsprechenden Nullstellen $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ $(i = 1,2,\ldots p)$ wird also diese Funktion, wenn nicht etwa *einzelne* der Werte $k_1, k_2, \ldots k_{r+p+1}$, verschwinden noch genau $r$ weitere wohlbestimmte Nullstellen $(x_k, y_k)$ $(k = 1,2,\ldots r)$ — jede so oft gezählt als die zuge-

hörige Ordnungszahl des Verschwindens angibt — aufweisen, sodaß wir bei Anwendung des *Abel*schen Theorems auf alle Integrale unseres Normalsystems unter Zugrundelegung der rationalen Funktion $S(x, y)$ von $x$ und $y$ die Beziehungen

$$(11.)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} du_\lambda + \sum_{i=1}^{p} \int_{(c_{r+i}, d_{r+i})}^{(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} du_\lambda \equiv 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots p) \\ \sum_{k=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} d Z^{(\varrho_\mu)}(x, y; \alpha_\varrho, \beta_\varrho) + \sum_{i=1}^{p} \int_{(c_{r+i}, d_{r+i})}^{(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} d Z^{(\varrho_\mu)}(x, y; \alpha_\varrho, \beta_\varrho) \\ \qquad \equiv -\left[\frac{d^{\varrho_\mu}}{dx^{\varrho_\mu}} \frac{S'(x, y)}{S(x, y)}\right]_{(x,y)=(\alpha_\varrho, \beta_\varrho)} \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2 \end{pmatrix} \\ \sum_{k=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} d\Pi(x, y; \alpha_1, \beta_1; \alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}) + \sum_{i=1}^{p} \int_{(c_{r+i}, d_{r+i})}^{(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} d\Pi(x, y; \alpha_1, \beta_1; \alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}) \\ \qquad \equiv \log \frac{S(\alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1})}{S(\alpha_1, \beta_1)} \; (\sigma = 1, 2, \ldots l - 1) \end{cases}$$

erhalten, worin die Kongruenzzeichen in üblicher Weise eine Übereinstimmung bis auf ganzzahlige Vielfache der Perioden zum Ausdruck bringen sollen.

Daß nun der erwähnte Ausnahmefall, wo von den ermittelten Werten $k_1, k_2, \ldots k_{r+p+1}$ der eine oder andere verschwindet, und daher $S(x, y)$ nicht an *sämtlichen* Stellen $(c_\mu, d_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots r + p)$ unendlich groß wird, hier gar nicht in Betracht kommen kann, ergibt sich in folgender Weise:

Zunächst sollen die Gleichungssysteme $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$ zur besseren Übersicht in etwas veränderter Reihenfolge nochmals hingeschrieben werden und zwar derart, daß ihr linearer homogener Charakter in Bezug auf die Unbekannten $k_1, k_2, \ldots k_{r+p}, k_{r+p+1}$ unmittelbar in Evidenz tritt:

$$(\beta.)\quad \sum_{\mu=1}^{r+p} k_\mu Z(\bar{x}_i, \bar{y}_i; c_\mu, d_\mu) + k_{r+p+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

$$(\alpha.)\quad \sum_{\mu=1}^{r+p} k_\mu \varphi_i(c_\mu, d_\mu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

$$(\gamma.)\quad \sum_{\mu=1}^{r+p} k_\mu [Z_{\varrho_\mu+1}(\alpha_\varrho, \beta_\varrho; c_\mu, d_\mu) + W_{\varrho,\varrho_\mu} Z(\alpha_\varrho, \beta_\varrho; c_\mu, d_\mu)] + k_{r+p+1} W_{\varrho,\varrho_\mu} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2 \end{pmatrix}$$

$$(\delta.)\quad \sum_{\mu=1}^{r+p} k_\mu [Z(\alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}; c_\mu, d_\mu) - W^{(\sigma)} Z(\alpha_1, \beta_1; c_\mu, d_\mu)] + k_{r+p+1}(1 - W^{(\sigma)}) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots l - 1).$$

Hierbei haben wir wiederum zur Abkürzung $\left[\frac{d^{\varrho_\mu+1}}{dx^{\varrho_\mu+1}} Z(x, y; c_\mu, d_\mu)\right]_{(x,y)=(\alpha_\varrho, \beta_\varrho)}$ $= Z_{\varrho_\mu+1}(\alpha_\varrho, \beta_\varrho; c_\mu, d_\mu)$ gesetzt, während die neueingeführten Größen $W_{\varrho,\varrho_\mu}$ und $W^{(\sigma)}$ durch $W_{\varrho,\varrho_\mu} = G_{\varrho_\mu}(-(w_{\varrho,0} + \bar{w}_{\varrho,0}), -(w_{\varrho,1} + \bar{w}_{\varrho,1}), \ldots, -(w_{\varrho,\varrho_\mu-1} + \bar{w}_{\varrho,\varrho_\mu-1}))$ $+ w_{\varrho,\varrho_\mu} + \bar{w}_{\varrho,\varrho_\mu}$ und $W^{(\sigma)} = e^{w^{(\sigma)} + \bar{w}^{(\sigma)}}$ definiert sind, wenn man unter den $G_{\varrho_\mu}$ die oben angegebenen, ganzen rationalen Funktionen versteht, mit deren Hilfe jede der ursprünglich nicht linearen Gleichungen $(\gamma.)$ unter Benutzung der übrigen

Gleichungen $(\gamma.)$ in eine lineare verwandelt worden war. Natürlich ist hierbei $G_0 = 0$ anzunehmen.

In dem aus $(\beta.)$, $(\alpha.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$ bestehenden Gesamtsystem von $r + p$ linearen, homogenen Gleichungen für die $r + p + 1$ Größen $k_1, k_2, \ldots k_{r+p+1}$ betrachten wir jetzt die aus den Koeffizienten von $k_1, k_2, \ldots k_{\mu-1}, k_{\mu+1}, k_{\mu+2}, \ldots k_{r+p}, k_{r+p+1}$ gebildete Determinante $(r + p)$-ten Grades, die wir kurz mit $D_\mu$ bezeichnen wollen, für die Werte $\mu = 1, 2, \ldots r + p$.

Gelingt es nun zu zeigen, daß für *unabhängig* voneinander gewählte Werte $w_k (k = 1, 2, \ldots p)$, $w_{\varrho,\varrho_\mu} \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2 \end{pmatrix}$, $w^{(\sigma)} (\sigma = 1, 2, \ldots l - 1)$ (also, in der anderen Schreibweise: für unabhängige $w_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots r)$) die Determinanten $D_1, D_2, \ldots D_{r+p}$ von Null verschieden sind, so gilt dasselbe auch von den Größen $k_1, k_2, \ldots k_{r+p}$, die ja in diesem Falle, wenn man von den Vorzeichen absieht, den genannten Determinanten proportional sein müssen. Es muß also dann auch die durch (10.) definierte Funktion $S(x, y)$ an *sämtlichen* Stellen $(c_\mu, d_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots r + p)$ wirklich unendlich groß werden, so daß die Allgemeingültigkeit unserer Relationen (11.), solange zwischen den Größen $v_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots r)$ keine Abhängigkeit besteht, hiermit ausgemacht wäre.

Um die Entscheidung hierüber herbeizuführen, machen wir vorläufig eine spezielle Annahme über die Größen $w_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots r)$: Nachdem wir durch willkürliche Wahl der Stellen $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ und durch Verfügung über die betreffenden Integrationswege die Werte $w_1, w_2, \ldots w_p, \bar{w}_{\varrho,\varrho_\mu}, \bar{w}_\sigma$ vermöge (8.) und (9.) festgelegt haben, setzen wir $w_{\varrho,\varrho_\mu} = -\bar{w}_{\varrho,\varrho_\mu} \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2 \end{pmatrix}$, $w^{(\sigma)} = -\bar{w}^{(\sigma)} (\sigma = 1, 2, \ldots l - 1)$ und *verstehen unter* $D_\mu^{(0)}$ *den dieser Annahme entsprechenden Wert der Determinante* $D_\mu$. Es ergeben sich dann, wenn wir noch die Ausdrücke $Z(\bar{x}_i, \bar{y}_i; c_\mu, d_\mu)$ $(i = 1, 2, \ldots p)$, $\varphi_i(c_\mu, d_\mu)$ $(i = 1, 2, \ldots p)$, $Z_{\varrho_\mu+1}(\alpha_\varrho, \beta_\varrho; c_\mu, d_\mu) \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2 \end{pmatrix}$, $Z(\alpha_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}; c_\mu, d_\mu) - Z(\alpha_1, \beta_1; c_\mu, d_\mu)$ $(\sigma = 1, 2, \ldots l - 1)$ in dieser Reihenfolge kurz mit $f_1(c_\mu), f_2(c_\mu), \ldots f_{r+p}(c_\mu)$ bezeichnen, offenbar die Gleichungen

$$D_\mu^{(0)} = \begin{vmatrix} f_1(c_1) & \ldots f_1(c_{\mu-1}) & f_1(c_{\mu+1}) & \ldots f_1(c_{r+p}) & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_p(c_1) & \ldots f_p(c_{\mu-1}) & f_p(c_{\mu+1}) & \ldots f_p(c_{r+p}) & 1 \\ f_{p+1}(c_1) & \ldots f_{p+1}(c_{\mu-1}) & f_{p+1}(c_{\mu+1}) & \ldots f_{p+1}(c_{r+p}) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{r+p}(c_1) & \ldots f_{r+p}(c_{\mu-1}) & f_{r+p}(c_{\mu+1}) & \ldots f_{r+p}(c_{r+p}) & 0 \end{vmatrix} (\mu = 1, 2, \ldots r + p),$$

denn da die eingeführten ganzen rationalen Funktionen $G_{\varrho_\mu}$, wie sich durch vollständige Induktion leicht ergibt, kein konstantes Glied haben, also gleichzeitig mit ihren Argumenten verschwinden, so erhalten wir aus der gemachten speziellen Annahme für die Größen $W_{\varrho,\varrho_\mu}, W^{(\sigma)}$ sofort die Werte $W_{\varrho,\varrho_\mu} = 0, W^{(\sigma)} = 1$.

Wenn wir jetzt die Stellen $(c_\mu, d_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots r + p)$ für einen Augenblick als willkürlich veränderlich betrachten, so ergibt eine ganz analoge Diskussion,

wie wir sie an die Determinante $\Delta$ der Gleichung (2.) angeknüpft hatten, auch ein ganz entsprechendes Resultat für die Determinanten $D_\mu^{(0)}$: Durch nahezu wörtliche Wiederholung derselben Schlußweisen wie dort läßt sich zeigen, daß die Ausdrücke $f_1(c_\mu), f_2(c_\mu), \ldots f_{r+p}(c_\mu)$, wofern wir uns nur die $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ als voneinander und von den $(a_\varrho, \beta_\varrho)$ verschieden gewählt denken, analytische, *voneinander linear unabhängige* Funktionen von $c_\mu$ sind, und daß daher die Determinanten $D_\mu^{(0)}$ nicht für *beliebige* Stellen $(c_\mu, d_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots r + p)$ verschwinden können. *Für die* $(c_\mu, d_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots r + p)$ *können wir daher sicher solche, auch von den* $(a_\varrho, \beta_\varrho)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ *verschiedene Stellen wählen, daß keine der Determinanten* $D_\mu^{(0)}$ *verschwindet.* Nach der am Anfang dieser Arbeit gemachten Vorbemerkung I dürfen wir uns aber die so getroffene Wahl der Stellen $(c_\mu, d_\mu)$ ohne jede Beschränkung der Allgemeinheit für die unteren Integrationsgrenzen von vornherein zugrunde gelegt denken, denn, wie dort gezeigt, muß unser Ansatz (1.) auch für die ursprünglich vorgeschriebenen unteren Integrationsgrenzen eindeutig umkehrbar sein, wenn er es, was sich nun bald ergeben wird, für die neu gewählten Grenzen ist. Wir können demnach die $D_\mu^{(0)}$ stets als von Null verschieden voraussetzen, und hieraus folgt unmittelbar, daß auch die Determinanten $D_\mu$ nicht identisch verschwinden können, also für *unabhängige* Werte $w_k$, $w_{\varrho, \varrho_\mu}$, $w^{(\sigma)}$ als von Null verschieden zu betrachten sind. Hiermit ist aber nach den obigen Darlegungen die Richtigkeit unserer Relationen (11.) nunmehr vollständig bewiesen.

Vermöge (8.), (9.) ($\gamma$.) und ($\delta$.) reduziert sich nun (11.) sofort auf das folgende System:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} du_\lambda \equiv w_\lambda & (\lambda = 1, 2, \ldots p) \\ \sum_{k=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} {}^{(\varrho_\mu)} dZ\,(x, y; a_\varrho, \beta_\varrho) \equiv w_{\varrho, \varrho_\mu} & \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_\mu = 0, 1, 2, \ldots n_\varrho - 2 \end{pmatrix} \\ \sum_{k=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} d\Pi\,(x, y; a_1, \beta_1; a_{\sigma+1}, \beta_{\sigma+1}) \equiv w_\sigma & (\sigma = 1, 2, \ldots l - 1), \end{cases}$$

wobei, dem *Abel*schen Theorem entsprechend, die ganzzahligen Koeffizienten der hinzutretenden Perioden für alle Integranden die gleichen sind, so daß wir durch eine entsprechende, für alle zwischen denselben Grenzen genommenen Integrale übereinstimmende Abänderung der Integrationswege offenbar auch bewirken können, daß die Kongruenzen in Gleichungen übergehen. Bei veränderter Schreibweise ergibt sich also nach unseren früheren Festsetzungen das einfache Resultat

$$w_i = \sum_{k=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} \varphi_i\,(x, y)\, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots r).$$

Wegen (7.) und (3.) erhalten wir daher

$$v_\lambda = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{\lambda i} \sum_{k=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} \varphi_i\,(x, y)\, dx = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{\lambda i} \sum_{k=1}^{r} \sum_{\varrho=1}^{r} C_{i\varrho} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} R_\varrho(x, y)\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{\varrho=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} R_\varrho(x, y)\, dx \sum_{i=1}^{r} \gamma_{\lambda i} C_{i\varrho} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r),$$

woraus sich vermöge (5.) unmittelbar die Gleichungen

$$v_\lambda = \sum_{k=1}^{r} \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} R_\lambda(x, y)\, dx \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r)$$

ergeben; d. h. die ermittelten Stellen $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2), \ldots (x_r, y_r)$ befriedigen wirklich unsere Ausgangsgleichungen (1.), und das Gesamtergebnis unserer bisherigen Darlegungen besteht also darin, daß unser Ansatz (1.) auch für beliebige Werte von $b$, wie wir behauptet hatten, eindeutig umkehrbar ist derart, daß er, solange die Bahnen der Größen $v_\lambda$ unabhängig voneinander verlaufen, stets eine und nur eine Lösung $(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$ wirklich besitzt.

Natürlich erhebt sich nunmehr sofort die Frage, ob unsere eindeutigen Umkehrungsfunktionen, deren Periodizität, wenn wir unter ihnen etwa die rationalen symmetrischen Verbindungen der oberen Integrationsgrenzen $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2), \ldots$ $(x_r, y_r)$ verstehen, ja unmittelbar evident ist, auch als *analytische* Funktionen von $v_1, v_2, \ldots v_r$ angesehen werden dürfen, und zur Entscheidung hierüber soll zum Schluß noch die folgende einfache Betrachtung dienen:

Aus der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der $R_\lambda(x, y)$ folgt sofort, daß die Determinante $|R_\lambda(x_k, y_k)|_{(k, \lambda = 1, 2, \ldots r)}$ nicht identisch verschwinden kann. Wäre nämlich identisch $|R_\lambda(x_k, y_k)|_{(k, \lambda = 1, 2, \ldots r)} = 0$, so müßte nach Wahl *beliebig vieler* Stellen $(x, y) = (a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ das Gleichungssystem $\sum_{\lambda=1}^{r} C_\lambda R_\lambda (a_i, b_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ einen Rang $\varrho \leqq r - 1$ besitzen und daher hinsichtlich der $C_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots r)$ stets in der Weise lösbar sein, daß nicht alle $C_\lambda$ verschwinden; es ließen sich also algebraische Funktionen $\sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda R_\lambda(x, y)$ bilden, die *beliebig viele* Nullstellen haben, und die folglich im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der $R_\lambda(x, y)$ identisch verschwinden müßten, da im entgegengesetzten Falle die Anzahl der Nullstellen von $\sum_{\lambda=1}^{r} C_\lambda R_\lambda(x, y)$ durch die Anzahl der Unendlichkeitsstellen der $R_\lambda$ unter Berücksichtigung der zugehörigen Ordnungszahlen von vornherein fest begrenzt ist. Da übrigens die betrachtete Determinante offenbar mit der Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(v_1, v_2, \ldots v_r)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_r)}$ übereinstimmt, so würde ihr identisches Verschwinden auch schon mit den bisherigen Ergebnissen unserer Untersuchung ganz unvereinbar sein.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir irgendwelche nicht singulären Stellen $(x, y) = (a_k, b_k)$ $(k = 1, 2, \ldots r)$, für welche $|R_\lambda(a_k, b_k)|_{(k, \lambda = 1, 2 \ldots r)} \neq 0$ ist und denken uns die $(x_k, y_k)$ als variable Stellen in der Umgebung von resp. $(a_k, b_k)$, so daß die Gleichungen (1.) nach dem *Taylor*schen Satze, wie leicht ersichtlich, übergehen in

$$(12.)\quad v_\lambda - A_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{i!} R_\lambda^{(i-1)}(a_k, b_k)\, (x_k - a_k)^i \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r),$$

worin die $A_\lambda$, nachdem über die Integrationswege bis in die Umgebungen der Stellen $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2), \ldots (a_r, b_r)$ in irgendeiner Weise verfügt ist, wohlbestimmte

Größen bedeuten, die sich durch Zusammenfassung der Integrationskonstanten ergeben. Unter den $R_\lambda^{(i-1)}(a_k, b_k)$ hat man hierbei die Werte $\left[\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} R_\lambda(x, y)\right]_{(x,y)=(a_k, b_k)}$ zu verstehen, wobei $R_\lambda^{(0)}(a_k, b_k) = R_\lambda(a_k, b_k)$ zu setzen ist. Da nun wegen $|R_\lambda(a_k, b_k)| \neq 0$ $(k, \lambda = 1, 2, \ldots r)$ in (12.) die aus den Koeffizienten der linearen Glieder gebildete Determinante nicht verschwindet, so erhalten wir nach dem bekannten Satze über die Umkehrung eines Systems ven Potenzreihen mehrerer Variablen aus (12.) für unabhängige Werte der $v_\lambda - A_\lambda$ von hinlänglich kleinen absoluten Beträgen Potenzentwickelungen von der Form

$$(13.) \quad x_k - a_k = \sum_{\lambda=1}^{r} a_{k\lambda}(v_\lambda - A_\lambda) + G_k(v_1 - A_1, v_2 - A_2, \ldots v_r - A_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

eindeutig als Lösungen von (12.) und folglich in Verbindung mit den entsprechenden $y$-Werten (gemäß der für $y$ in der Umgebung der Stellen $(a_k, b_k)$ geltenden Entwickelungen) auch als Umkehrung von (1.), wobei hier die $G_k$ Potenzreihen bedeuten, welche, mit den Gliedern 2. Dimension beginnend, nach ganzen positiven Potenzen von $v_1 - A_1, v_2 - A_2, \ldots v_r - A_r$ fortschreiten, während das System der $a_{k\lambda}$ als reziprokes System der aus den $R_\lambda(a_k, b_k)$ $(\lambda, k = 1, 2, \ldots r)$ gebildeten Matrix zu bestimmen ist.

Allerdings gelten die Gleichungen (13.) nur in der Umgebung der Stellen $v_\lambda = A_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots r)$; auf dem Wege der analytischen Fortsetzung kann man aber von hier aus zur Darstellung des weiteren Verlaufes der Umkehrungsfunktionen gelangen, deren analytisches Verhalten somit außer Zweifel steht.

Hinsichtlich der *speziellen Art* dieses Verhaltens lassen sich nun selbstverständlich zahlreiche weitere Fragen stellen: Ob z. B. die analytische Fortsetzung überallhin möglich ist, oder ob hier natürliche Grenzen existieren, die zur Bildung von „Inseln" führen, in denen der analytische Zusammenhang unterbrochen wird (ohne Zweifel wird hierbei das durch bestimmte Abhängigkeiten der $v_\lambda$ definierte singuläre Wertegebiet dieser Größen, wo die Eindeutigkeit der Umkehrung des Ansatzes (1.), wie wir sahen, nicht mehr behauptet werden kann, eine besondere Rolle spielen); ob die Natur der Singularitäten der Umkehrungsfunktionen eine derartige ist, daß sich für diese Funktionen allgemeingültige analytische Darstellungen, etwa als Quotienten ganzer transzendenter Funktionen (wie dies z. B. bei den *Abel*schen Funktionen mit Hilfe der Theta-Funktionen der Fall ist) ermöglichen lassen usw. Dies alles und vieles andere muß indessen eingehenden Spezialuntersuchungen vorbehalten bleiben, während wir unsere Aufgabe mit der allgemeinen Feststellung der Eindeutigkeit, Periodizität und analytischen Natur der aus unserem Ansatz (1.) sich ergebenden Umkehrungsfunktionen als gelöst betrachten.

FEB 26 1925

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

**Schäfer, Schlesinger, Schottky**

von

**K. Hensel.**

**Band 154.**

Heft 2.

Ausgegeben den 16. Januar

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1925

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

# Band 154. Heft 2.

## Inhaltsverzeichnis.


**Schönhardt, Erich,** Ein Beitrag zur Theorie der linearen Substitutionsgruppen Seite 63

**Färber, Alfred,** Über das elliptische Integral . . . . . — 94

**Hasse, Helmut,** Über das allgemeine Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste im Körper $k\zeta$ der $l$-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von $k\zeta$ . . . — 96

**Wahlin, G. E.,** The Number $e$ in $k(p)$ . . . . . — 110

**Stammler, Gerhard,** Elementare Betrachtungen über den Aufbau von Zahlverknüpfungen nach Gesetzen . . . . . — 114


### *An unsere Mitarbeiter!*

*Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.*

*Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.*

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

**An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik**

**Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.**

Diesem Hefte liegen Prospekte der Firmen **Franz Deuticke in Wien** und **R. Oldenbourg in München** bei, die wir besonderer Beachtung empfehlen.

# Ein Beitrag zur Theorie der linearen Substitutionsgruppen.[1])

Von *Erich Schönhardt* in Tübingen.

## Inhalt.

Seite

§ 1. Über die Doppelverhältnisse von drei Punktepaaren ..... 66
§ 2. Die harmonisch trennenden Punktepaare ..... 70
§ 3 Zerlegung linearer Substitutionen ..... 76
§ 4. Über eine besondere Lage von drei bzw. vier Punktepaaren in der Ebene ..... 81
§ 5. Klassifikation der Substitutionenpaare ..... 85
§ 6. Verallgemeinerung der Zerlegung ..... 90

Von den in der komplexen Zahlenebene eigentlich diskontinuierlichen Gruppen linearer Substitutionen einer komplexen Veränderlichen bilden vorwiegend die sogenannten „Spiegelungsgruppen", welche sich durch Spiegelungen an Kreisen erzeugen lassen, und deren Untergruppen den Gegenstand spezieller Untersuchungen. Dieser Art von Gruppen gehören z. B. die meisten der im ersten Band der „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" von *Fricke-Klein* behandelten Beispiele an [2]). Die Untergruppe vom Index zwei, welche in jeder Spiegelungsgruppe ausgezeichnet enthalten ist, wird durch Adjunktion von einer der Spiegelungen zur Spiegelungsgruppe erweitert. Zählt sie zu den Hauptkreisgruppen, so kann sie auch durch Zusatz einer involutorischen Substitution [3]) zu einer Gruppe erweitert werden, welche sich durch involutorische Substitutionen erzeugen läßt, und welche wir eine „involutorische" Gruppe nennen wollen. Dann ist die ursprüngliche Gruppe in der involutorischen, und diese in der Spiegelungsgruppe ausgezeichnet vom Index zwei.

Ein Beispiel einer involutorischen Gruppe, welche nicht mehr in einer solchen Beziehung zu einer Spiegelungsgruppe steht und die selbständige Bedeutung der involutorischen Gruppen in helles Licht setzt, gewinnt man leicht aus der bekannten Gruppe, welche durch die Spiegelungen an $n+1$ einander weder treffenden noch trennenden Kreisen erzeugt wird [4]). Man braucht zu diesem Zweck nur auf jeden

[1]) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen als Habilitationsschrift angenommen.

[2]) Leipzig 1897. Im Folgenden zitiert mit „Aut. I".

[3]) d. h. elliptischen Substitution der Periode zwei.

[4]) Vgl. Aut. I. Seite 436.

dieser Kreise zwei Punkte als Fixpunkte von $n+1$ involutorischen Substitutionen anzunehmen und diese an die Stelle der Spiegelungen treten zu lassen. Die so erzeugte Gruppe spielt eine wichtige Rolle in der Uniformierungstheorie beliebiger hyperelliptischer Kurven, worauf wir nachher zu sprechen kommen.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich in der Hauptsache mit den aus drei involutorischen Substitutionen $u_1, u_2, u_3$ erzeugten Gruppen. Dieser Fall ist von besonderem Interesse, weil hier die Untergruppe vom Index zwei die allgemeinste Gruppe darstellt, welche sich aus zwei beliebigen linearen Substitutionen erzeugen läßt. Die Untersuchung dieser Gruppen liefert also auch eine allgemeine Theorie der Substitutionenpaare.

Es liegt nahe, als Invarianten einer involutorischen Gruppe die Doppelverhältnisse der Fixpunkte von je zwei Erzeugenden einzuführen. Im Fall dreier Erzeugenden sind durch diese drei Doppelverhältnisse die übrigen, welche sich aus den sechs Fixpunkten bilden lassen, im allgemeinen zweideutig bestimmt. In Folge davon hat auch die Aufgabe, aus den drei Doppelverhältnissen und drei beliebig angenommenen Fixpunkten die andern drei Fixpunkte zu bestimmen, im allgemeinen zwei Lösungen, welche aber, wie in § 1 gezeigt wird, linear verwandt sind. Die Diskriminante der bei dieser Gelegenheit auftretenden quadratischen Gleichungen ist für die Lage der drei Fixpunktepaare von fundamentaler Bedeutung, insbesondere wenn die drei Doppelverhältnisse reell sind. Sie gibt später (§ 5) Veranlassung zu einer ersten Klassifikation nicht loxodromischer Substitutionenpaare, bezw. der durch sie erzeugten Gruppen.

Als Erzeugende der ausgezeichneten Untergruppe der involutorischen Gruppe $(u_1, u_2, u_3)$ kann man zwei der drei Substitutionen: $S_1 = u_2 u_3$; $S_2 = u_3 u_1$; $S_3 = u_1 u_2$[1]) auswählen, welche der symbolischen Gleichung: $S_1 S_2 S_3 = 1$ genügen. Die Fixpunktepaare dieser drei Substitutionen stehen zu denen der drei involutorischen in der reziproken Beziehung, daß immer ein Paar des einen Systems zu zwei Paaren des andern harmonisch liegt. Unter Verwendung der Theorie der quadratischen Formen und voller Ausnützung der Reziprozität werden in § 2 die Relationen aufgestellt, welche zwischen den Invarianten der beiden Punktsysteme bestehen. Der von *F. Klein* betonte Zusammenhang der Invariantentheorie dreier quadratischer Formen mit der sphärischen Trigonometrie [2]), welcher in der letzteren Disziplin noch nicht die gebührende Beachtung gefunden hat, wird nebenbei durch einfache Umdeutung der gewonnenen Beziehungen in Erscheinung gesetzt.

Nachdem in § 3 die Zerlegung zweier beliebiger linearer Substitutionen $S_1$ und $S_2$ in je zwei involutorische nach obigem Ansatz durchgeführt und ihre Eindeutigkeit dargetan ist, werden dort die Ergebnisse des § 2 zur Aufstellung der Relationen verwendet, welche zwischen den Multiplikatoren der Substitutionen $S_1, S_2, S_3$ und den Doppelverhältnissen ihrer Fixpunkte, sowie deren Diskriminante bestehen.

---

[1]) Von diesem Ansatz wird in Aut. I. (S. 293; 355 ff.) nur bei der Konstruktion des Diskontinuitätsbereichs der Gruppen der Gattung (1,1) Gebrauch gemacht. Sonst wird meist der entsprechende Ansatz mit Spiegelungen herangezogen.

[2]) *F. Klein*, Über die hypergeometrische Funktion. Autogr. Vorl. 1893/94, Leipzig 1906, S. 329.

Lassen sich nun durch die Fixpunktepaare der Erzeugenden einer involutorischen Gruppe Kreise legen, welche einander weder treffen noch trennen, so ist sie von einer bemerkenswerten Art: Ihre ausgezeichnete Untergruppe hat dann den *Schottky*schen Typus [1]), d. h. jede ihrer Erzeugenden transformiert einen Kreis in einen außerhalb desselben liegenden andern, und keiner dieser Kreise trennt oder trifft die übrigen. Es ist also wünschenswert, die Bedingungen zu kennen, welchen die Doppelverhältnisse von $n+1$ Punktepaaren genügen müssen, damit die Kreise der angegebenen Art möglich sind. Mit dieser Frage beschäftigt sich § 4. Es werden dort die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Spezialfall, daß die Paare symmetrisch zu einem Kreise liegen, bei $n = 2$ und $n = 3$ angegeben. Das verwendete Verfahren bleibt auch bei $n > 3$ brauchbar.

In § 5 ergibt sich sodann im Hinblick auf das Vorzeichen der Diskriminante und der drei Doppelverhältnisse der involutorischen Fixpunkte, sowie auf die Möglichkeit der oben besprochenen Kreise eine Klassifikation der Substitutionenpaare, welche zum großen Teil auch die zugehörigen Gruppen betrifft. Sie unterscheidet sich von der bei *Fricke-Klein* aufgestellten [2]) durch den Verzicht auf projektiv geometrische Vorstellungen, stimmt aber in den Ergebnissen im wesentlichen mit ihr überein. Es erscheinen so die von *Fricke* auf anderem Wege gefundenen Kriterien unter einem neuen Gesichtspunkt.

Zum Schluß wird in § 6 die Anzahl und Art der Bedingungen angegeben, welchen die Moduln einer aus $n$ beliebigen Substitutionen ($n > 2$) erzeugten Gruppe genügen müssen, wenn sie wie bei $n = 2$ Untergruppe vom Index zwei einer involutorischen Gruppe sein soll. Die Aufstellung der einen bei $n = 3$ notwendigen Bedingung führt zu einer auch bei *Fricke-Klein* vorkommenden Relation, deren eigentliche Bedeutung dort jedoch nicht in Erscheinung tritt [3]).

Es möge hier noch die funktionentheoretische Bedeutung derjenigen involutorischen Gruppen erwähnt werden, deren Untergruppe vom Index zwei den *Schottky*schen Typus besitzt. Der Fundamentalbereich dieser *Schottky*schen Gruppe setzt sich aus zwei Bereichen vom Geschlecht Null zusammen, welche einander vermöge einer involutorischen Substitution zugeordnet sind, und von denen jeder als Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe aufgefaßt werden kann. Die beiden Teilbereiche können als konforme Bilder der beiden Blätter einer hyperelliptischen *Riemann*schen Fläche angesehen werden. Die Verzweigungspunkte dieser Fläche sind dann die Bilder der Fixpunkte der involutorischen Substitutionen, und der einzelnen involutorischen Substitution entspricht die Vertauschung der beiden Blätter [4]).

---

[1]) *Schottky*, Über eine spezielle Funktion . . . . Ds. Journ. Bd. 101, S. 227.

[2]) Aut. I. S. 335 ff.

[3]) Aut. I. S. 411 und 396.

[4]) Ich habe diesen Fall in meiner Dissertation: „Über die *Schottky*sche Gruppe im hyperelliptischen Fall“ (Tübingen 1920; nicht im Druck erschienen) behandelt und dort in Verallgemeinerung einer Produktdarstellung von *Weber* die Funktion angegeben, welche die Abbildung bewirkt.

Vgl. auch *Koebe*, Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hyperelliptischer Kurven (Iterationsmethoden). Math. Zeitschr. Bd. 7 (1920).

## § 1. Über die Doppelverhältnisse von drei Punktepaaren.

In der Ebene der komplexen Veränderlichen $z$ seien sechs Punkte gegeben. Die fünfzehn möglichen wesentlich verschiedenen Doppelverhältnisse (D. V.) derselben müssen sich durch drei voneinander unabhängige ausdrücken lassen. Die Punkte seien paarweise geordnet und durch $e_\nu, \bar{e}_\nu (\nu = 1, 2, 3)$ bezeichnet [1]). Die drei D. V.:

$$(1.) \qquad d_1 = (e_2\, \bar{e}_2\, e_3\, \bar{e}_3);\ d_2 = (e_3\, \bar{e}_3\, e_1\, \bar{e}_1);\ d_3 = (e_1\, \bar{e}_1\, e_2\, \bar{e}_2),$$

wo $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$ die Abkürzung für $(z_1 - z_3)\,(z_2 - z_4) : (z_2 - z_3)\,(z_1 - z_4)$ ist, sind dann voneinander unabhängig und mögen als Parameter für die Darstellung der übrigen dienen. Diese Darstellung nimmt eine besonders einfache Form an, wenn man noch drei weitere Parameter, etwa die D. V.:

$$(2.) \qquad v_1 = (e_1\, \bar{e}_1\, \bar{e}_2\, e_3);\ v_2 = (e_2\, \bar{e}_2\, \bar{e}_3\, e_1);\ v_3 = (e_3\, \bar{e}_3\, \bar{e}_1\, e_2)$$

einführt. Die bloße Verwendung der Identität:

$$(3.) \qquad (pqrs)\,(pqst) = (pqrt)$$

ergibt folgende Tabelle, in der zur besseren Übersicht nur die Indizes der Punkte angegeben sind:

$$(4.) \quad \begin{array}{lll} (1\ \bar{1}\ 2\ \bar{2}) = d_3 & (2\ \bar{2}\ 3\ \bar{3}) = d_1 & (3\ \bar{3}\ 1\ \bar{1}) = d_2 \\ (1\ \bar{1}\ 2\ 3) = d_3\, v_1 & (2\ \bar{2}\ 3\ 1) = d_1\, v_2 & (3\ \bar{3}\ 1\ 2) = d_2\, v_3 \\ (1\ \bar{1}\ 2\ \bar{3}) = d_2\, d_3\, v_1 & (2\ \bar{2}\ 3\ \bar{1}) = d_3\, d_1\, v_2 & (3\ \bar{3}\ 1\ \bar{2}) = d_1\, d_2\, v_3 \\ (1\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}) = d_2\, v_1 & (2\ \bar{2}\ \bar{3}\ \bar{1}) = d_3\, v_2 & (3\ \bar{3}\ \bar{1}\ \bar{2}) = d_1\, v_3 \\ (1\ \bar{1}\ \bar{2}\ 3) = v_1 & (2\ \bar{2}\ \bar{3}\ 1) = v_2 & (3\ \bar{3}\ \bar{1}\ 2) = v_3 \end{array}$$

Die Parameter $v_\nu$ sind jetzt noch durch die $d_\nu$ auszudrücken. Aus der Identität:

$$(\bar{2}\ \bar{3}\ 1\ 3) = (3\ 1\ \bar{3}\ \bar{2})$$

folgt wegen (3.):

$$(\bar{2}\ \bar{3}\ 1\ 2)\,(\bar{2}\ \bar{3}\ 2\ 3) = (3\ 1\ \bar{3}\ \bar{1})\,(3\ 1\ \bar{1}\ \bar{2})$$

oder:

$$\frac{v_2}{v_2 - 1}(1 - d_1) = (1 - d_2)\frac{v_1}{v_1 - 1},$$

also besitzt die Größe:

$$(5.) \qquad \varrho = (1 - d_\nu)\left(1 - \frac{1}{v_\nu}\right)$$

für alle drei Indizes $\nu = 1, 2, 3$, denselben Wert und muß somit eine symmetrische Funktion der $d_\nu$ sein. In den sechs Punkten ausgedrückt hat $\varrho$ den Wert:

$$\varrho = \frac{(1 - \bar{1})\,(2 - \bar{2})\,(3 - \bar{3})}{(1 - \bar{2})\,(2 - \bar{3})\,(3 - \bar{1})}.$$

Die einzige bei gegebenen D. V. $d_\nu$ noch zulässige Vertauschung unter den sechs Punkten, nämlich die gleichzeitige Transposition in allen drei Paaren, verwandelt $\varrho$ in die Größe:

[1]) Der Querstrich dient hier, wie auch später, lediglich zur Unterscheidung der beiden Punkte eines Paares.

$$\bar{\varrho} = \frac{(1-\bar{1})\,(2-\bar{2})\,(3-\bar{3})}{(\bar{1}-2)\,(\bar{2}-3)\,(\bar{3}-1)},$$

welche mit $\varrho$ zusammen der quadratischen Gleichung:

(6.) $\varrho^2 + (d_1 + d_2 + d_3 - d_1 d_2 d_3 - 2)\,\varrho + (1-d_1)\,(1-d_2)\,(1-d_3) = 0$

genügt. Aus (4.) (5.) (6.) folgt also:

*Sämtliche Doppelverhältnisse der sechs Punkte lassen sich durch $d_1, d_2, d_3$ und die eine symmetrische quadratische Irrationalität $\varrho$ rational ausdrücken* [1]).

Die Diskriminante von (6.) hat den Wert:

(7.) $$\boxed{\mathfrak{d} = (c_1 - c_3)^2 - 4c_2 + 8c_3},$$

wo $c_1 = d_1 + d_2 + d_3$, $c_2 = d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1$, $c_3 = d_1d_2d_3$ ist, oder in den Punkten selbst ausgedrückt:

(8.) $$\mathfrak{d} = \left[\frac{(e_1-\bar{e}_1)\,(e_2-\bar{e}_2)\,(e_3-\bar{e}_3)\begin{vmatrix} 1 & e_1+\bar{e}_1 & e_1\bar{e}_1 \\ 1 & e_2+\bar{e}_2 & e_2\bar{e}_2 \\ 1 & e_3+\bar{e}_3 & e_3\bar{e}_3 \end{vmatrix}}{(e_1-\bar{e}_2)\,(e_2-\bar{e}_1)\,(e_2-\bar{e}_3)\,(e_3-\bar{e}_2)\,(e_3-\bar{e}_1)\,(e_1-\bar{e}_3)}\right]^2;$$

sie verschwindet also abgesehen von Koinzidenzen der Punkte dann und nur dann, wenn die Determinante im Zähler den Wert Null hat, d. h. wenn die drei Punktepaare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ einer Involution angehören [2]). Ist dies der Fall, so wird daran durch Transposition innerhalb eines Paares nichts geändert, somit muß $\mathfrak{d}$ bei dieser Operation, welche zwei der D. V. $d_\nu$ durch ihre reziproken Werte ersetzt, bis auf einen Faktor seinen Wert behalten. In der Tat findet man:

(9.) $$\mathfrak{d}\left(d_1, \frac{1}{d_2}, \frac{1}{d_3}\right) = \frac{1}{d_3^2 d_3^2}\,\mathfrak{d}(d_1, d_2, d_3)$$

und zyklisch weiter.

Führt man in (7.) die Quadratwurzeln $w_\nu = \sqrt{d_\nu}$ ein, so wird:

(10.) $$\boxed{\mathfrak{d} = (w_1w_2w_3 + w_1 + w_2 + w_3)\,(w_1w_2w_3 + w_1 - w_2 - w_3)\,(w_1w_2w_3 - w_1 + w_2 - w_3)\,(w_1w_2w_3 - w_1 - w_2 + w_3)}$$

also $\mathfrak{d} = 0$ für:

$$d_1 = w_1^2;\ d_2 = w_2^2;\ d_3 = \left(\frac{w_1 + w_2}{1 + w_1w_2}\right)^2.$$

Sind die $d_\nu$ alle reell und positiv, bzw. alle reell und negativ, so setzt man zweckmäßig:

$$d_\nu = +\,th^2\frac{\varphi_\nu}{2} \text{ bzw. } d_\nu = -\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi_\nu}{2},$$

dann ist $\mathfrak{d} = 0$ äquivalent mit:

(11.) $$\pm\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \varphi_3 = 2k\pi i \text{ bzw. } = 2k\pi.$$

---

[1]) Es können natürlich auch drei D. V. ausgewählt werden, durch welche sich die übrigen eindeutig ausdrücken lassen, z. B. $d_2$, $d_3$, $v_1$.

[2]) *W. Fr. Meyer*, Allgemeine Formen- und Invariantentheorie 1909, S. 33 (später zitiert mit M).

Die Diskriminante $\mathfrak{d}$ ist, wie (9.) zeigt, noch abhängig von der Anordnung der Punkte innerhalb der einzelnen Paare. Um diese Abhängigkeit zu beseitigen, dividieren wir (7.) durch das Produkt $\prod_{\nu=1,2,3}(1-d_\nu)^2$ und führen rechts die Invarianten:

$$(12.) \qquad i_\nu = \left(\frac{1+d_\nu}{1-d_\nu}\right)^2$$

ein. Man erhält dann:

$$(13.) \qquad \boxed{\frac{\mathfrak{d}}{\prod_\nu (1-d_\nu)^2} = \frac{1}{4}\left(i_1+i_2+i_3-2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3}-1\right)}$$

wenn die positive Wurzel $\sqrt{i_\nu}$ durch $\frac{1+d_\nu}{1-d_\nu}$ definiert wird. Zu jedem $i_\nu$ gehören zwei zueinander reziproke Werte von $d_\nu$. Sind also die drei Invarianten $i_\nu$ gegeben, so lassen sich acht zugehörige Wertetripel für die drei D. V. $d_\nu$ angeben. Sie zerfallen in zwei Klassen, welche durch die beiden Tripel $d_1, d_2, d_3$ und $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \frac{1}{d_3}$ repräsentiert werden können. Aus den Repräsentanten gewinnt man die übrigen Tripel durch Transpositionen innerhalb der Punktepaare, d. h. indem man zwei der $d_\nu$ durch ihre reziproken Werte ersetzt. Nimmt man dieselbe Operation nur mit einem $d_\nu$ oder mit allen dreien vor, so entsteht aus einem Tripel der einen Klasse eines der andern, was aber nicht durch Transpositionen bewirkt werden kann. Aus Gleichung (13.) entsteht so die konjugierte:

$$(13^*.) \qquad \frac{\mathfrak{d}^*}{\prod_\nu (1-d_\nu)^2} = \frac{1}{4}\left(i_1+i_2+i_3+2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3}-1\right),$$

wo

$$(7^*.) \qquad \mathfrak{d}^* = (1-c_2)^2 - 4\,c_1c_3 + 8\,c_3$$

gesetzt ist, denn es ist:

$$d_1^2\,\mathfrak{d}\left(\frac{1}{d_1}, d_2, d_3\right) = \mathfrak{d}^*;\quad d_1^2\,\mathfrak{d}^*\left(\frac{1}{d_1}, d_2, d_3\right) = \mathfrak{d}.$$

An die Stelle von (10.) tritt die Gleichung:

$$(10^*.) \quad \mathfrak{d}^* = (1+w_2w_3+w_3w_1+w_1w_2)\cdot(1+w_2w_3-w_3w_1-w_1w_2)$$
$$\cdot(1-w_2w_3+w_3w_1-w_1w_2)\cdot(1-w_2w_3-w_3w_1+w_1w_2)$$

und an Stelle von (11.), wenn $\mathfrak{d}^* = 0$ ist,

$$(11^*.) \qquad \pm\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \varphi_3 = (2k+1)\,\pi i \text{ bzw. } = (2k+1)\,\pi.$$

Das Vorhergehende möge nun Verwendung finden zur Lösung der Aufgabe, die sechs Punkte $e_\nu, \bar{e}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) zu bestimmen, wenn irgend drei von ihnen und die drei D. V. $d_\nu$ gegeben sind. Sie hat natürlich, wenn $\mathfrak{d}$ nicht verschwindet, zwei Lösungen. Bezüglich der Annahme der drei Punkte sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) die drei gegebenen Punkte gehören nur zweien der drei Punktepaare $e_\nu, \bar{e}_\nu$ an,

b) die drei gegebenen Punkte gehören drei verschiedenen Punktepaaren an.

Im *Fall a*) kann die Aufgabe auch so formuliert werden: „Ein Punktepaar

zu finden, welches mit zwei gegebenen Paaren gegebene D. V. bildet.“ Ist z. B $e_1, \bar{e}_1$ und $e_2$ gegeben, so folgt $\bar{e}_2$ sofort eindeutig aus $d_3$, und man hat nur noch das dritte Punktepaar $e_3, \bar{e}_3$ aus $d_1$ und $d_2$ zu ermitteln. In dieser Form ist die Aufgabe schon von *Schilling* [1]) behandelt worden, ich begnüge mich daher damit, das Resultat anzuführen, das sich übrigens ohne Mühe aus (4.), (5.), (6.) gewinnen läßt:

„Sind die drei D. V. $d_\nu$ und außerdem drei Punkte gegeben, welche nur zweien von den drei Paaren $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ angehören, so ist das vierte Element dieser beiden Paare eindeutig bestimmt, und die zwei Lösungen, welche man für das dritte Paar erhält, werden durch diejenige lineare Substitution der Periode zwei ineinander transformiert, deren Fixpunkte die ersten beiden Paare harmonisch trennen.“

Etwas weniger einfach gestaltet sich der Übergang von einer Lösung zur andern im *Fall b*). Wir wählen etwa als gegebene Punkte: $e_1 = 1$; $e_2 = 0$; $e_3 = \infty$ und setzen:

$$\varepsilon, \varepsilon' = \frac{c_1 - c_3 - 2d_1 \pm \sqrt{\mathfrak{d}}}{2d_3\,(1 - d_1)};$$

dann wird:

$$\bar{e}_1 = \varepsilon;\ \bar{e}_2 = \frac{(1 - d_1)}{(1 - d_2)}\,(\varepsilon - d_2) = \frac{(1 - d_3)\,\varepsilon}{1 - d_3\,\varepsilon};\ \bar{e}_3 = \frac{\varepsilon - d_2}{1 - d_2},$$

woraus die zweite Lösung entspringt, wenn man $\varepsilon$ durch $\varepsilon'$ ersetzt. Den Übergang vom ersten System zum zweiten bewerkstelligt hier die Substitution:

$$z' = \frac{(\varepsilon' - d_2)\,z + \left(1 - \frac{1}{d_3}\right) d_2}{(1 - d_2)\,z + d_2 - \varepsilon}$$

nach dem Schema:

$$\begin{vmatrix} e_1 \bar{e}_1 & e_2 \bar{e}_2 & e_3 \bar{e}_3 \\ \downarrow\ \bar{e}_1' e_1 & \bar{e}_2' e_2 & \bar{e}_3' e_3\ \downarrow \end{vmatrix}$$

Sie hat nur dann die Periode zwei, wenn $\varepsilon' = \varepsilon$, d. h. wenn $\mathfrak{d} = 0$ ist. Dann existiert aber nur eine Lösung, und die Substitution vertauscht einfach die beiden Elemente in jedem der drei Punktepaare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$. Schreibt man die Substitution in der Normalform:

$$\frac{z' - E}{z' - \bar{E}} = q\,\frac{z - E}{z - \bar{E}},$$

so ist

$$q = \frac{\sqrt{\mathfrak{d}} + \sqrt{\mathfrak{d} + 4c_3\,(1 - c_1 + c_2 - c_3)}}{\sqrt{\mathfrak{d}} - \sqrt{\mathfrak{d} + 4c_3\,(1 - c_1 + c_2 - c_3)}}$$

und

$$(E, \bar{E}) = \frac{c_1 + c_3 - 2\,(d_1 + d_2 d_3) \pm \sqrt{\mathfrak{d} + 4c_3\,(1 - c_1 + c_2 - c_3)}}{2(1 - d_1)\,(1 - d_2)\,d_3}.$$

Die Fälle a) und b) zusammenfassend können wir sagen:

*„Die beiden Lösungen der Aufgabe, aus drei gegebenen Punkten und den drei D. V. $d_\nu$ die drei übrigen Punkte zu bestimmen, sind linear verwandt.“*

---

[1]) *Schilling*, Beiträge zur geometrischen Theorie der *Schwarz*schen *s*-Funktion. Math. Annalen 44 (1894), Seite 205.

Die Aufgabe läßt außerdem die Bedeutung erkennen, welche die Diskriminante $\mathfrak{d}$ im Falle reeller $d_\nu$ für die Lage der sechs Punkte $e_\nu, \bar{e}_\nu$ besitzt. Nimmt man nämlich drei Punkte reell an, so werden, wenn $\mathfrak{d} \geqq 0$ ist, auch die übrigen drei reell, d. h. allgemein:

*„Sind alle drei D. V. $d_\nu$ reell, und ist außerdem $\mathfrak{d} \geqq 0$, so liegen alle sechs Punkte $e_\nu, \bar{e}_\nu$ auf einem Kreis und umgekehrt. Ist andererseits $\mathfrak{d} < 0$, so liegen zwar von den drei Punktepaaren $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ je zwei auf einem Kreis, diese drei Kreise sind jedoch voneinander verschieden.* (Im letzteren Fall liegen die beiden Lösungen der Aufgabe spiegelbildlich in bezug auf den Kreis durch die drei gegebenen Punkte.)

Es ist nun z. B. aus (10.) leicht zu erkennen, daß die Ungleichung $\mathfrak{d} > 0$ sicher erfüllt ist, wenn die reellen $d_\nu$ verschiedene Vorzeichen haben, oder wenn eine ungerade Anzahl derselben größer als Eins ist. In beiden Fällen liegen also nach obigem Satz alle sechs Punkte $e_\nu, \bar{e}_\nu$ auf einem Kreis [1]).

## § 2. Die harmonisch trennenden Punktepaare.

Wenn unter den vier Elementen von zwei Punktepaaren keine Koinzidenzen stattfinden, dann gibt es stets ein eindeutig definiertes Punktepaar, welches die beiden Paare harmonisch trennt. Gruppiert man vier gegebene Punkte auf die drei möglichen Arten in Paare und bestimmt jedesmal das harmonisch trennende Paar, so liegen die drei auf diese Weise erhaltenen Punktepaare auch unter sich harmonisch.

Wir wollen uns nun wieder sechs Punkte in bestimmter Weise zu Paaren $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ gruppiert und zu je zwei Paaren das harmonisch trennende Paar $(E_\nu, \bar{E}_\nu)$ $\nu = 1, 2, 3$ ermittelt denken. Dann stellen wir uns die Aufgabe, die aus den so gewonnenen sechs Punkten gebildeten D. V.:

$$D_1 = (E_2 \bar{E}_2 E_3 \bar{E}_3);\ D_2 = (E_3 \bar{E}_3 E_1 \bar{E}_1);\ D_3 = (E_1 \bar{E}_1 E_2 \bar{E}_2)$$

durch die D. V. der ursprünglichen sechs Punkte:

$$d_1 = (e_2 \bar{e}_2 e_3 \bar{e}_3);\ d_2 = (e_3 \bar{e}_3 e_1 \bar{e}_1);\ d_3 = (e_1 \bar{e}_1 e_2 \bar{e}_2)$$

auszudrücken. Diese Aufgabe hat im wesentlichen, d. h. abgesehen von Transpositionen innerhalb der Paare $(E_\nu, \bar{E}_\nu)$, nur eine Lösung. Zwar gibt es nach § 1 im allgemeinen zwei Systeme von je drei Paaren $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$, welche die vorgeschriebenen D. V. $d_\nu$ besitzen, wenn drei ihrer Punkte beliebig angenommen werden, aber die beiden Systeme sind linear verwandt; somit sind auch die Systeme ihrer harmonisch trennenden Paare linear verwandt und stimmen also in den D. V. $D_\nu$ überein.

Zur Lösung der Aufgabe ziehen wir die Theorie der quadratischen Formen heran. Zunächst mögen aus den Punktepaaren $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ die drei quadratischen Formen:

$$f_\nu = a_\nu z^2 + 2b_\nu z + c_\nu = a_\nu (z - e_\nu)(z - \bar{e}_\nu) \tag{14}$$

gebildet und für ihre Diskriminanten, die harmonischen Invarianten, sowie die Resultanten von je zweien folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

---

[1]) Zur Illustration dieser Verhältnisse zieht man mit Vorteil die geometrische Deutung von $\mathfrak{d} = 0$ als Fläche heran, indem man die $d_\nu$ als rechtwinklige Raumkoordinaten auffaßt.

$$\delta_\nu = a_\nu c_\nu - b_\nu^2 = -\frac{a_\nu^2}{4}(e_\nu - \bar{e}_\nu)^2$$

$$(15.)\qquad h_\nu = a_\lambda c_\mu - 2b_\lambda b_\mu + c_\lambda a_\mu = \frac{a_\lambda a_\mu}{2}\left[(e_\lambda - e_\mu)(\bar{e}_\lambda - \bar{e}_\mu) + (\bar{e}_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - \bar{e}_\mu)\right]$$

$$r_\nu = 4(a_\lambda b_\mu - b_\lambda a_\mu)(b_\lambda c_\mu - c_\lambda b_\mu) - (a_\lambda c_\mu - c_\lambda a_\mu)^2$$
$$= -a_\lambda^2 a_\mu^2 (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - \bar{e}_\mu)(\bar{e}_\lambda - e_\mu)(\bar{e}_\lambda - \bar{e}_\mu) \qquad \binom{\lambda \neq \mu \neq \nu}{=1,2,3}$$

Sie sind bekanntlich durch die Identitäten

$$(16.)\qquad h_\nu^2 + r_\nu = 4\delta_\lambda \delta_\mu$$

miteinander verbunden [1]).

Damit werden die absoluten Invarianten:

$$(17.)\qquad i_\nu = \left(\frac{1+d_\nu}{1-d_\nu}\right)^2 = \frac{h_\nu^2}{4\delta_\lambda \delta_\mu} = 1 - \frac{r_\nu}{4\delta_\lambda \delta_\mu}$$

und die D. V.:

$$(18.)\qquad d_\nu = (e_\lambda \bar{e}_\lambda e_\mu \bar{e}_\mu) = \frac{-(2h_\nu^2 + r_\nu) + 4h_\nu \sqrt{\delta_\lambda}\sqrt{\delta_\mu}\,^{2)}}{r_\nu}.$$

Diese Formel liefert zwar für jedes $d_\nu$ zwei zueinander reziproke Werte, von den acht möglichen Kombinationen derselben sind aber nur die vier zulässig, welche man aus (18.) durch Vorzeichenwechsel der einzelnen Quadratwurzel $\sqrt{\delta}$ erhält. Das oben gewählte positive Vorzeichen ist für alle drei Werte $\nu$ richtig, weil mit den Abkürzungen:

$$\delta_1\delta_2\delta_3 = \delta;\ h_1h_2h_3 = h;\ r_1r_2r_3 = r$$

die rationale Beziehung bestehen muß:

$$\prod_{\nu=1,2,3}\left(d_\nu + \frac{2h_\nu^2 + r_\nu}{r_\nu}\right) = \prod_{\nu=1,2,3}\frac{d_\nu^2 - 1}{2d_\nu} = +64\frac{h\delta}{r}.$$

Für das Quadrat der Determinante aus den Koeffizienten der drei Formen $f_\nu$:

$$\eta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

gilt nun bekanntermaßen die Darstellung: [3])

$$2\eta^2 = \begin{vmatrix} 2\delta_1 & h_3 & h_2 \\ h_3 & 2\delta_2 & h_1 \\ h_2 & h_1 & 2\delta_3 \end{vmatrix}$$

und daraus folgt:

$$(19.)\qquad \frac{\eta^2}{4\delta} = -\frac{h_1^2}{\delta_2\delta_3} - \frac{h_2^2}{\delta_3\delta_1} - \frac{h_3^2}{\delta_1\delta_2} + 1 + \frac{h_1h_2h_3}{4\delta_1\delta_2\delta_3}$$
$$= -i_1 - i_2 - i_3 + 1 + 2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3},$$

wo die positive Wurzel $\sqrt{i_\nu}$ wie bei (13.) zu definieren ist. Also wird unter Berücksichtigung von (13.) auch:

$$(19a.)\qquad \frac{\eta^2}{4\delta} = -\frac{4\delta}{\prod_\nu (1-d_\nu)^2}.$$

---

[1]) M., S. 17; 19; 22. [2]) M., S. 22. [3]) M., S. 34.

Ganz dieselben Entwicklungen wollen wir uns nun für die drei Punktepaare $(E_\nu, \bar{E}_\nu)$ durchgeführt denken, indem wir die Formeln einfach in große Buchstaben übersetzen.

Nun kommt die Verknüpfung der beiden Systeme, dadurch daß wir fordern: die Paare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ und $(E_\nu, \bar{E}_\nu)$ sollen einander harmonisch trennen.

Bekanntlich ist dann bis auf einen konstanten Faktor $F_\nu$ die Funktionaldeterminante von $f_\lambda$ und $f_\mu$, ebenso $f_\nu$ die von $F_\lambda$ und $F_\mu$ [1]). Da in den quadratischen Formen bis jetzt nur die Verhältnisse der Koeffizienten festgelegt sind, so ist es möglich, über die konstanten Faktoren so zu verfügen, daß sie alle einander gleich werden, was hier aus Bequemlichkeitsrücksichten geschehen mag.

Setzt man außerdem noch voraus, daß $\eta$ und $H$ nicht verschwinden, so kann man beiden noch den Wert 2 vorschreiben. Dann wird:

$$4F_\nu = (f_\lambda, f_\mu); \quad 4f_\nu = (F_\lambda, F_\mu), \qquad [\lambda \neq \mu \neq \nu = 1, 2, 3]$$

wo durch die Klammern die Funktionaldeterminante der eingeschlossenen Formen angedeutet werden soll. Zwischen den Koeffizienten der Formen bestehen somit die Beziehungen:

$$(20.) \qquad A_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2; \; 2B_1 = a_2 c_3 - a_3 c_2; \; C_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2$$

und zyklisch weiter, welche, wie alle Formeln dieses Paragraphen, bei Vertauschung der großen Buchstaben mit den kleinen ihre Gültigkeit bewahren.

Aus (15.) und (20.) folgen nun sofort auch die Relationen zwischen den Invarianten der beiden Systeme, nämlich:

$$(21.) \qquad 4\Delta_\nu = r_\nu; \; 4\delta_\nu = R_\nu.$$

Mit Hilfe von (17.) folgt hieraus weiter:

$$1 - I_\nu = \frac{\delta_\nu}{\Delta_\lambda \Delta_\mu} = \frac{4R_\nu}{r_\lambda r_\mu}; \; 1 - i_\nu = \frac{\Delta_\nu}{\delta_\lambda \delta_\mu} = \frac{4r_\nu}{R_\lambda R_\mu}$$

und hieraus durch Division:

$$(22.) \qquad \frac{1 - I_\nu}{1 - i_\nu} = \frac{\delta}{\Delta} = \frac{R}{r},$$

ferner

$$(23.) \qquad \prod_\nu (1 - I_\nu) = \frac{\delta}{\Delta^2}; \quad \prod_\nu (1 - i_\nu) = \frac{\Delta}{\delta^2}.$$

Aus (22.) und (23.) kommt schließlich:

$$(24.) \qquad 1 - I_\nu = \frac{1}{\delta (1 - i_\lambda)(1 - i_\mu)}.$$

Nun ist aber wegen (19.):

$$\frac{1}{\delta} = 1 - i_1 - i_2 - i_3 + 2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3},$$

also:

$$(25.) \qquad \boxed{1 - I_\nu = \frac{1 - i_1 - i_2 - i_3 + 2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3}}{(1 - i_\lambda)(1 - i_\mu)}}$$

---

[1]) M., S. 26.

Diese Formel gibt den Zusammenhang der absoluten Invarianten beider Systeme. Beachtet man die bisher gebrauchte Definition von $\sqrt{i_\nu}$ [1]), so gewinnt man aus (25.) leicht die gesuchte Beziehung zwischen den D. V. Zunächst wird:

$$(26.) \qquad I_\nu = \frac{(d_1 d_2 d_3 - d_\lambda - d_\mu + d_\nu)^2}{4 d_\lambda d_\mu (1 - d_\nu)^2}$$

und hieraus unmittelbar:

$$(27.) \qquad \boxed{\begin{aligned} D_\nu &= \frac{c_3 - c_1 + 2d_\nu - 2(1 - d_\nu)\sqrt{d_\lambda}\sqrt{d_\mu}}{c_3 - c_1 + 2d_\nu + 2(1 - d_\nu)\sqrt{d_\lambda}\sqrt{d_\mu}} \\ &= \frac{(c_3 - c_1 + 2d_\nu - 2(1 - d_\nu)\sqrt{d_\lambda}\sqrt{d_\mu})^2}{\mathfrak{d}} \\ &= \frac{(w_1 w_2 w_3 + w_\lambda + w_\mu + w_\nu)\,(w_1 w_2 w_3 - w_\lambda - w_\mu + w_\nu)}{(w_1 w_2 w_3 + w_\lambda - w_\mu - w_\nu)\,(w_1 w_2 w_3 - w_\lambda + w_\mu - w_\nu)} \end{aligned}} \; [2]).$$

Die $D_\nu$ ändern ihren Wert natürlich nicht, wenn man gleichzeitig zwei der D. V. $d_\nu$ durch ihre reziproken Werte ersetzt, denn dies kann durch Transpositionen innerhalb der Punktepaare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ bewirkt werden. Dagegen geht $D_\nu$ in eine andere Größe $D_\nu^*$ über, wenn man nur ein $d_\nu$ oder alle drei durch den reziproken Wert ersetzt. Hierbei ist:

$$\begin{aligned} D_\nu^* &= \frac{c_2 - 1 - 2d_\lambda d_\mu - 2(1 - d_\nu)\sqrt{d_\lambda}\sqrt{d_\mu}}{c_2 - 1 - 2d_\lambda d_\mu + 2(1 - d_\nu)\sqrt{d_\lambda}\sqrt{d_\mu}} \\ (27^*.) \quad &= \frac{(c_2 - 1 - 2d_\lambda d_\mu - 2(1 - d_\nu)\sqrt{d_\lambda}\sqrt{d_\mu})^2}{\mathfrak{d}^*} \\ &= \frac{(1 + w_\lambda w_\mu + w_\mu w_\nu + w_\nu w_\lambda)\,(1 + w_\lambda w_\mu - w_\mu w_\nu - w_\nu w_\lambda)}{(1 - w_\lambda w_\mu + w_\mu w_\nu - w_\nu w_\lambda)\,(1 - w_\lambda w_\mu - w_\mu w_\nu + w_\nu w_\lambda)}. \end{aligned}$$

Die $D_\nu^*$ können ebenfalls als Lösungen der zu Anfang dieses Paragraphen gestellten Aufgabe angesehen werden, wenn man nicht die drei D. V. $d_\nu$, sondern die drei Invarianten $i_\nu$ als gegeben betrachtet. Die $D_\nu$ und $D_\nu^*$ gehören nämlich zu den beiden verschiedenen Klassen von D. V.-Tripeln, welche sich aus den $i_\nu$ bilden lassen [3]). Diese Tatsache wird noch deutlicher bei den zu den $D_\nu^*$ gehörigen Invarianten $I_\nu^*$, für die:

$$(25^*.) \qquad 1 - I_\nu^* = \frac{1 - i_1 - i_2 - i_3 - 2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3}}{(1 - i_\lambda)(1 - i_\mu)}$$

gilt.

Zum Schluß möge noch eine interessante Relation zwischen den Diskriminanten $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{D}$ der $d_\nu$ bzw. $D_\nu$ aufgestellt werden. Aus (24.) folgt:

$$\frac{1 - I_\nu}{1 - i_\nu} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{\prod_\nu (1 - i_\nu)}.$$

Nun ist aber wegen (12.):

---

[1]) Siehe Gleichung (13.).

[2]) Siehe Gleichung (7.) und (10.). Diese $c_\nu$ sind natürlich andere als in Gleichung (14.).

[3]) Vgl. S. 68.

$$1 - i_\nu = \frac{-4d_\nu}{(1-d_\nu)^2}$$

und wegen (19 a.):

$$\frac{1}{\delta} = \frac{-4\mathfrak{d}}{\Pi(1-d_\nu)^2}.$$

somit:

$$(28.) \qquad \frac{1-I_\nu}{1-i_\nu} = \frac{\mathfrak{d}}{16\,d_1d_2d_3};\quad \frac{1-i_\nu}{1-I_\nu} = \frac{\mathfrak{D}}{16\,D_1D_2D_3}$$

und hieraus:

$$(29.) \qquad \boxed{\mathfrak{d}\mathfrak{D} = 256\,d_1d_2d_3\,D_1D_2D_3}$$

Diese Formel gibt u. a., wenn die darin vorkommenden Größen reell sind, Aufschluß über die möglichen Vorzeichenkombinationen derselben.

Ich möchte diese Entwicklungen nicht beschließen, ohne auf den Zusammenhang hinzuweisen, in dem sie mit der sphärischen Trigonometrie stehen.

Wie *Klein* gezeigt hat, kann die sphärische Trigonometrie aufgefaßt werden als die Lehre von den algebraischen Relationen zwischen den Invarianten dreier quadratischer Formen [1]). Es muß also jede der hier aufgestellten Beziehungen äquivalent sein mit einer Formel der sphärischen Trigonometrie.

Um bei reellen Argumenten zu bleiben, setzen wir voraus:

$$d_\nu < 0\ (\nu = 1, 2, 3);\ \mathfrak{d} < 0.$$

Dann lassen sich die Strecken $e_\nu\bar{e}_\nu$ als stereographische Projektionen von drei Durchmessern einer Kugel auffassen, welche die komplexe Zahlenebene in dem Punkte gleicher (negativer) Potenz in Bezug auf die drei, je zwei Paare $(e_\nu\bar{e}_\nu)$ verbindenden, Kreise berührt. Die Punkte der Kugel seien von den entsprechenden der Ebene durch angehängte Striche unterschieden. Bezeichnet man nun die Seiten des *Euler*schen Dreiccks $e_1'e_2'e_3'$ mit $\varphi_\nu$, so ist:

$$d_\nu = -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_\nu}{2}$$

zu setzen [2]). Die $\varphi_\nu$ sind zugleich die Außenwinkel des positiven Polardreiecks $E_1'E_2'E_3'$ von $e_1'e_2'e_3'$, und wenn dessen Seiten mit $\Phi_\nu$ bezeichnet werden, so ist auch:

$$D_\nu = -\operatorname{tg}^2\frac{\Phi_\nu}{2}.$$

Also ist zu substituieren:

$$\sqrt{i_\nu} = \cos\varphi_\nu;\ \sqrt{1-i_\nu} = \sin\varphi_\nu;\ \frac{1}{\sqrt{1-d_\nu}} = \cos\frac{\varphi_\nu}{2};\ \frac{i\sqrt{\bar{d}_\nu}}{\sqrt{1-d_\nu}} = \sin\frac{\varphi_\nu}{2}$$

und mit den Abkürzungen:

$$+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3 = 2\sigma;\ \sigma-\varphi_\nu = \sigma_\nu;\ i = \sqrt{-1}$$

---

[1]) s. S. 64, Anm. 2.

[2]) Dies folgt sofort, wenn man das D. V. der vier auf einen Kreise paarweise diametral liegenden Punkte $(e_\lambda'\bar{e}_\lambda'e_\mu'\bar{e}_\mu') = d_\nu'$ auswertet, welches denselben Wert, wie $d_\nu$, haben muß.

$$i\frac{\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}+\sqrt{d_1}\sqrt{d_2}\sqrt{d_3}}{\sqrt{(1-d_1)\,(1-d_2)\,(1-d_3)}}=\sin\sigma$$

$$-i\frac{\sqrt{d_1}-\sqrt{d_2}-\sqrt{d_3}+\sqrt{d_1}\sqrt{d_2}\sqrt{d_3}}{\sqrt{(1-d_1)\,(1-d_2)\,(1-d_3)}}=\sin\sigma_1$$

und zyklisch weiter. Zugleich gelten dieselben Formeln wieder in großen Buchstaben geschrieben.

Wir erkennen zunächst in der Größe:

$$1-i_1-i_2-i_3+2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3}$$

das Quadrat des Eckensinus [1]), wofür die Gleichung (25.) die verschiedenen Ausdrücke liefert. Die Gleichungen (10.) und (13.) geben für dieselbe Größe außerdem den bekannten Ausdruck:

$$4\sin\sigma\,\sin\sigma_1\,\sin\sigma_2\,\sin\sigma_3.$$

(22.) entspricht dem Sinussatz, (27.) der Formel:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\Phi_\nu}{2}=\frac{\sin\sigma\sin\sigma_\nu}{\sin\sigma_\lambda\sin\sigma_\mu}.$$

Ferner sagt die Gleichung (29.) im Verein mit (13.) aus, daß das Produkt der beiden Eckensinus gleich dem Produkt der Sinus aller Seiten und Winkel des Dreiecks ist. Die Gleichung (29.) steht überdies auch in engem Zusammenhang mit einem Satz von *Study* [2]), welcher aussagt, daß die Brüche:

$$\frac{1+l_2l_3}{\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2};\quad\frac{-1+l_2l_3}{1-\lambda_2\lambda_3};\quad\frac{l_3l_1+l_1l_2}{1+\lambda_2\lambda_3};\quad\frac{-l_3l_1+l_1l_2}{\lambda_3\lambda_1-\lambda_1\lambda_2},$$

wo in der gegenwärtigen Bezeichnung $\lambda_\nu=\operatorname{ctg}\frac{\varphi_\nu}{2}$, $l_\lambda=\operatorname{ctg}\frac{\Phi_\nu}{2}$ zu setzen ist, sowie die aus ihnen durch zyklische Vertauschung der Indizes hervorgehenden Ausdrücke alle denselben Wert haben. Spaltet man nämlich die Gleichung (29.) folgendermaßen:

$$\text{(29a.)}\qquad\frac{\sqrt{d_1}\sqrt{d_2}\sqrt{d_3}\sqrt{\mathfrak{D}}}{4\,D_1D_2D_3}=\frac{4\,d_1d_2d_3}{\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\sqrt{D_3}\sqrt{\mathfrak{d}}},$$

so steht hier gerade das Quadrat jener Invariante, welche den Wert der *Study*schen Quotienten ausmacht. Aus (27.) folgt die einfachere Beziehung:

$$\text{(30.)}\qquad\sqrt{D_2}\sqrt{D_3}=\frac{\sqrt{d_1}\sqrt{d_2}\sqrt{d_3}+\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}}{\sqrt{d_1}\sqrt{d_2}\sqrt{d_3}+\sqrt{d_1}-\sqrt{d_2}-\sqrt{d_3}},$$

welche äquivalent derjenigen ist, aus der *Study* den Satz gewinnt. Diese Beziehung liefert für die Quotienten die Werte:

$$\frac{-2\sqrt{d_1}\sqrt{d_2}\sqrt{d_3}}{\sqrt{d_1}\sqrt{d_2}\sqrt{d_3}+\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}}\ \text{und}\ \frac{\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\sqrt{D_3}+\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}+\sqrt{D_3}}{-2\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\sqrt{D_3}},$$

---

[1]) Vgl. etwa: *Weber-Wellstein*, Enzyklopädie der Elementarmathematik. Bd. II. 3. Auflage 1915. S. 366.

[2]) Dasselbe S. 374 oder *Study*, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen. Leipzig 1893, Abschn. 2, § 4.

welche sich als übereinstimmend erweisen, und deren Quadrate mit Hilfe von (10.) und (27.) leicht auf die Form (29 a.) gebracht werden.

Beachtet man noch, daß

$$\cos\sigma = \frac{1 + \sqrt{d_2}\sqrt{d_3} + \sqrt{d_3}\sqrt{d_1} + \sqrt{d_1}\sqrt{d_2}}{\sqrt{(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)}}$$

$$\cos\sigma_1 = \frac{1 + \sqrt{d_2}\sqrt{d_3} - \sqrt{d_3}\sqrt{d_1} - \sqrt{d_1}\sqrt{d_2}}{\sqrt{(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)}} \text{ usw.}$$

ist, so führt die Betrachtung der Größe $\mathfrak{d}^*$ in den Gleichungen (13*.) und (10*.) zu der weniger bekannten trigonometrischen Formel:

$$-4\cos\sigma\cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos\sigma_3 = 1 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_3 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3.$$

## § 3. Zerlegung linearer Substitutionen.

Die lineare Substitution $S$ der komplexen Veränderlichen $z$:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{31.}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, beliebige komplexe Zahlen bedeuten, welche der Gleichung:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen, kann bekanntlich, wenn sie nicht parabolisch ist, auf die Normalform:

$$\frac{z' - E}{z' - \bar{E}} = q\frac{z - E}{z - \bar{E}} \tag{32.}$$

gebracht werden, und dabei ist [1]):

$$\alpha + \delta = \sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}. \tag{33.}$$

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Substitution $S$ in der Form:

$$S = u_1 u_2$$ [2])

als Aufeinanderfolge zweier elliptischer Substitutionen der Periode zwei darzustellen. Die beiden Fixpunktepaare der letzteren sind dann bis auf eine komplexe Konstante dadurch bestimmt, daß sie harmonisch zu dem Paar $(E, \bar{E})$ liegen und das Doppelverhältnis:

$$\boxed{d_3 = (e_1\bar{e}_1 e_2\bar{e}_2) = \left(\frac{\sqrt{q} - 1}{\sqrt{q} + 1}\right)^2} \tag{34.}$$

besitzen müssen. Aus (33.) und (34.) folgt:

$$\frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{1 + d_3}{1 - d_3} = \sqrt{i_3} \quad \text{(vgl. (12.))} \tag{35.}$$

---

[1]) Vgl. *Klein-Fricke,* Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd. I. Leipzig 1890, S. 164.

[2]) Wie in dem in Anmerkung 1 zitierten Werke bedeutet hier und im Folgenden das symbolische Produkt zweier Substitutionen $S_1$ und $S_2$: $S_1 S_2$ diejenige Substitution, welche dieselbe Wirkung hat, wie wenn man die Variable $z$ zuerst der Substitution $S_1$ und dann $S_2$ unterwirft. Also, wenn $z' = S_1(z)$; $z'' = S_2(z')$ gesetzt wird, so ist $z'' = S_1 S_2(z)$.

Die Substitution $S$ ist also dann und nur dann

$$\begin{cases}\text{elliptisch}\\ \text{parabolisch, wenn } i_3\begin{cases}<1\\ =1,\ \text{d. h. } d_3\begin{cases}<0\\ =0 \text{ oder } \infty,\ \text{d. h. geometrisch:}\\ >0\end{cases}\\ >1\end{cases}\\ \text{hyperbolisch}\end{cases}$$

wenn die Punktepaare $(e_1, \bar{e}_1)$ und $(e_2, \bar{e}_2)$ auf einem Kreis liegen und sich trennen bzw. einen Punkt gemein haben bzw. sich nicht trennen.

Unter Verwendung der Fixpunkte $(E, \bar{E})$ kann der Multiplikator $c_1$ von $S$ auch in der Form:

(36.) $$q = (E\bar{E}e_2e_1)^2 = (E\bar{E}e_2\bar{e}_1)^2 = \text{usw.}$$

dargestellt werden. Daraus geht hervor, daß die Substitution mit denselben Fixpunkten wie $S$ und dem Multiplikator $\pm\sqrt{q}$ das Paar $(e_1, \bar{e}_1)$ in das Paar $(e_2, \bar{e}_2)$ transformiert.

Stellt man die Fixpunkte von $u_1$ und $u_2$ als Nullstellen der zwei quadratischen Formen:

$$f_\varkappa = (z-E)^2 + \lambda_\varkappa(z-\bar{E})^2 \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

dar, so ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = q \text{ oder } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{q}$$

zu setzen, weil die simultane absolute Invariante $i_3$ der beiden Formen wegen (33.) und (35.) den Wert:

(37.) $$\boxed{i_3 = \frac{(1+q)^2}{4q}}$$

haben muß.

Auf die Substitutionen $u_\varkappa$ führt auch die Frage nach denjenigen linearen Substitionen, durch welche sich die zyklische Gruppe $(S)$ erweitern läßt [1]). Soll eine Gruppe $G$ durch die Substitution $T$ erweitert werden können, so muß $T$ bekanntlich mit $G$ vertauschbar sein. Besteht $G$ nur aus den Potenzen einer einzigen Substitution $S$, so muß also die Transformierte:

$$S' = T^{-1}\,S\,T$$

ebenfalls eine Potenz von $S$ sein, und dann hat sie sicher dieselben Fixpunkte. Somit muß $T$ das Paar der Fixpunkte von $S$ in sich transformieren, d. h. entweder jeden einzelnen fest lassen oder beide miteinander vertauschen. Der ersten Forderung genügt jede Substitution, welche die Fixpunkte mit $S$ gemein hat, der zweiten aber lediglich elliptische Substitutionen der Periode zwei, und zwar gerade diejenigen, welche bei der oben durchgeführten Zerlegung von $S$ auftreten. Aus der Zerlegung folgt sofort, daß jede dieser involutorischen Substitutionen die Substitution $S$ in ihre reziproke transformiert, und daß sämtliche Substitutionen der durch $u_\varkappa$ erweiterten Gruppe in der Form:

$$S^n \text{ oder } S^n u_\varkappa \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots)$$

darstellbar sind. Dabei sind alle Substitutionen $S^n u_\varkappa$ ebenfalls involutorisch.

---

[1]) Diese Betrachtungen gehen parallel denen, welche in den „Modulfunktionen“ (S. 76, Anm. 1). Bd. I. Seite 200 über Spiegelungen angestellt werden.

Wenn $S$ nicht elliptisch ist, so lassen sich durch die Fixpunktepaare von $u_1$ und $u_2$ zwei einander nicht treffende Kreise legen. Diese Kreise begrenzen einen Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe. Wendet man $u_1$ oder $u_2$ auf ihn an, so wird er in einen zweiten längs eines der Kreise an ihn grenzenden Bereich transformiert, welcher mit dem ersten zusammen einen Fundamentalbereich der Gruppe $(S)$ ergibt. Man kann die begrenzenden Kreise so wählen, daß sie Breitenkreise [1]) der Substitution $S$ sind. Ist $S$ elliptisch und periodisch, so nimmt man die beiden Meridiankreise [1]) von $S$, welche durch $(e_1, \bar{e}_1)$ und $(e_2, \bar{e}_2)$ gehen. Dann kann eines der vier so entstehenden Sichelgebiete als Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe angesehen werden, und aus diesem erhält man den Bereich der Gruppe $(S)$ wie oben.

Sind zwei Substitutionen $S_1$ und $S_2$ vorgelegt, so läßt eine einfache Konstantenzählung vermuten, daß es möglich ist, sie in je zwei von drei involutorischen Substitutionen zu zerlegen.

Es ist zweckmäßig, zugleich auch die Substitution $S_3$ zu betrachten, welche durch:

$$S_1 S_2 S_3 = 1 \tag{38.}$$

definiert ist. Dieser Gleichung wird durch den Ansatz:

$$S_1 = u_2 u_3;\ S_2 = u_3 u_1;\ S_3 = u_1 u_2 \tag{39.}$$

genügt. Sind die $S_\nu$ und $u_\nu$ in der Form:

$$z' = \frac{\alpha_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu};\ (\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu = 1) \text{ und } z' = \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z - a_\nu};\ (-a_\nu^2 - b_\nu c_\nu = 1) \tag{40.}$$

$(\nu = 1, 2, 3)$ gegeben, so folgt aus (39.):

$$a_3 = \frac{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1}{N};\ b_3 = \frac{(\alpha_1 - \delta_1)\beta_2 - (\alpha_2 - \delta_2)\beta_1}{N};\ c_3 = \frac{-(\alpha_1 - \delta_1)\gamma_2 + (\alpha_2 - \delta_2)\gamma_1}{N}$$

und zyklisch weiter, wobei zur Abkürzung:

$$N^2 = -\begin{vmatrix} \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 & (\alpha_1 - \beta_1)\beta_2 - (\alpha_2 - \delta_2)\beta_1 \\ (\alpha_1 - \delta_1)\gamma_2 - (\alpha_2 - \delta_2)\gamma_1 & \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Diese Determinante ist aber nichts anderes, als die Resultante der beiden quadratischen Formen, deren Nullstellen die Fixpunkte $E_1$, $\bar{E}_1$ und $E_2$, $\bar{E}_2$ der Substitutionen $S_1$ und $S_2$ repräsentieren. Ihr Rang ist für die Zerlegung entscheidend: Ist er gleich Eins, so werden $a_3$, $b_3$, $c_3$ unendlich, ist er gleich Null, so werden sie unbestimmt. Es zeigt sich also:

„Die Zerlegung zweier Substitutionen $S_1$ und $S_2$ gemäß dem Ansatz: $S_1 = u_2 u_3$; $S_2 = u_3 u_1$ ist auf eine einzige Art möglich, wenn $S_1$ und $S_2$ keinen Fixpunkt gemein haben. Unendlich viele solche Zerlegungen gibt es, wenn $S_1$ und $S_2$ dieselben Fixpunkte haben [2]), und gar keine, wenn sie nur einen Fixpunkt gemein haben."

---

[1]) Unter „Meridiankreisen" einer linearen Substitution sind die Kreise durch ihre Fixpunkte, unter „Breitenkreisen" die Kreise des dazu orthogonalen Büschels zu verstehen. (Vgl. *F. Klein*, Zur *Riemann*schen Funktionentheorie, Math. Ann. 21, S. 172).

[2]) In diesem Fall ist eine komplexe Konstante verfügbar.

Der Fall, daß eine der Substitutionen $u_\nu$ der identischen gleich wird, ist hierbei nicht als Zerlegung mitgezählt.

Mit Hilfe dieser Zerlegung läßt sich leicht folgender Satz beweisen:

„Liegen die Fixpunkte zweier hyperbolischer Substitutionen $S_1$ und $S_2$ auf einem Kreis, so ist von den beiden Substitutionen $S_1 S_2$ und $S_1 S_2^{-1}$ höchstens eine elliptisch."

Zunächst ist sofort ersichtlich, daß die fraglichen Substitutionen beide hyperbolisch werden, wenn die Fixpunkte von $S_1$ und $S_2$ sich trennen oder einen Punkt gemein haben. Indem wir diese Möglichkeit ausschließen, nehmen wir die Fixpunkte auf der reellen Achse an und zerlegen $S_1$ und $S_2$ gemäß (39.). Dann fallen die Fixpunkte $(e_\nu\, \bar{e}_\nu)$ der $u_\nu$ ebenfalls auf die reelle Achse. Wir denken uns nun über $e_\nu \bar{e}_\nu$ als Durchmesser Kreise $K_\nu$ errichtet. Ist dann $S_1 S_2$ elliptisch, so schneiden sich $K_1$ und $K_2$. Dagegen schneiden sich nicht $K_1 K_3$ und $K_2 K_3$.

$K_1$ und $K_2$ liegen also auf derselben Seite von $K_3$. Nun ist aber

$$S_1 S_2^{-1} = u_2 u_3 u_1 u_3 = u_2 u_1'.$$

Der Kreis $K_1'$ über $(e_1' \bar{e}_1')$ geht aus $K_1$ vermöge $u_3$ hervor. Also liegen $K_2$ und $K_1'$ getrennt durch $K_3$, somit ist $S_1 S_2^{-1}$ hyperbolisch.

Führt man statt $S_3$ die Substitution $S_3'$ ein durch:

$$S_3' S_2 S_1 = 1,$$

so wird dieser Gleichung durch den Ansatz:

$$S_1 = u_3' u_2';\ S_2 = u_1' u_3';\ S_3' = u_2' u_1'$$

genügt. Man sieht aber sofort, daß $u_3' = u_3$ sein muß, und daraus folgt, daß $u_1', u_2'$ durch Transformation mit $u_3$ aus $u_1, u_2$ hervorgehen. Diese Zerlegung ist also von der obigen nicht wesentlich verschieden.

Wir kehren zur ersten Zerlegungsart zurück und behandeln den Fall weiter, wo $S_1$ und $S_2$ keinen Fixpunkt gemein haben. Dann besitzen die drei Substitutionen $S_\nu (\nu = 1, 2, 3)$ drei getrennte Fixpunktepaare $(E_\nu, \bar{E}_\nu)$, welche von denen der $u_\nu : (e_\nu, \bar{e}_\nu)$ harmonisch getrennt werden. Wir können also die Ergebnisse des § 2 für die Ermittlung der Beziehungen zwischen den Invarianten der Substitutionen verwerten.

In Sinne der dort vorhandenen Reziprozität ziehen wir neben den $S_\nu$ und $u_\nu$ auch noch die drei involutorischen Substitutionen $U_\nu$ mit den Fixpunkten $E_\nu, \bar{E}_\nu$, sowie die durch die Gleichungen:

$$s_1 = U_2 U_3;\ s_2 = U_3 U_1;\ s_3 = U_1 U_2$$

definierten Substitutionen $s_\nu$ mit den Fixpunkten $e_\nu, \bar{e}_\nu$ in Betracht. Die Multiplikatoren der $s_\nu$ sollen dabei durch $Q_\nu$ bezeichnet werden. Wie in § 2 ist dann auch hier jede Formel gegenüber der Vertauschung der großen mit den kleinen Buchstaben invariant. Diese Inversion gestattet, aus (26.) sofort die Invarianten $i_\nu$ [1]) der $S_\nu$ zu bestimmen, wenn die D. V. $D_\nu$ ihrer Fixpunkte bekannt sind. Daraus gewinnt man für die Multiplikatoren $q_\nu$ wegen (37.) die Formel:

[1]) Siehe Gleichung (35.) und (37.).

$$(41.)\qquad \boxed{q_\nu = \frac{(D_1 D_2 D_3 - D_\lambda - D_\mu + D_\nu \pm \sqrt{\mathfrak{D}})^2}{4 D_\lambda D_\mu (1 - D_\nu)^2} \qquad \binom{\lambda+\mu+\nu}{=1,2,3}}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hat aber wegen (5.) und (6.) den Wert $D_\lambda D_\mu V_\nu^2$, wo unter $V_\nu$ gemäß (2.) das D. V. $(E_\lambda \bar{E}_\lambda \bar{E}_\mu E_\mu)$ zu verstehen ist. Unter Beachtung von (4.) folgt hieraus die *Schilling*sche Formel [1]):

$$(42.)\quad q_\nu = (E_\nu \bar{E}_\nu E_\lambda E_\mu)\,(E_\nu \bar{E}_\nu \bar{E}_\lambda \bar{E}_\mu) = (E_\nu \bar{E}_\nu \bar{E}_\lambda E_\mu)\,(E_\nu \bar{E}_\nu E_\lambda \bar{E}_\mu)\,.$$

Als Umkehrung von (41.) ergibt sich:

$$(43.)\qquad \boxed{D_\nu = \frac{(1 - \sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\sqrt{q_3})\,(\sqrt{q_\lambda}\sqrt{q_\mu} - \sqrt{q_\nu})}{(\sqrt{q_\lambda}\sqrt{q_\nu} - \sqrt{q_\mu})\,(\sqrt{q_\mu}\sqrt{q_\nu} - \sqrt{q_\lambda})}}$$

Nimmt man eine Transposition innerhalb eines der Paare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ vor, so gehen zwei der D. V. $d_\nu$ in ihre reziproken Werte über, und die zugehörigen beiden Wurzeln $\sqrt{q_\nu}$ wechseln das Vorzeichen. Dabei ändert sich natürlich keines der $D_\nu$. Wechselt man bei einer ungeraden Anzahl der Wurzeln $\sqrt{q_\nu}$ das Vorzeichen, so entstehen aus den $D_\nu$ die $D_\nu^*$ (vgl. (27*.)). Die Vertauschung von $q_\nu$ mit $1/q_\nu$ bewirkt den Übergang von $D_\mu$ zu $1/D_\mu$ $(\mu \neq \nu)$, sowie von $D_\mu^*$ zu $1/D_\mu^*$, dagegen behalten $D_\nu$ und $D_\nu^*$ ihre Werte, sie entspricht der Transposition im Paar $(E_\nu, \bar{E}_\nu)$.

Von (43.) ausgehend gelangt man nun auch zu einer Darstellung der Diskriminante $\mathfrak{D}$ in den Multiplikatoren $q_\nu$. Setzen wir nämlich zur Abkürzung:

$$1 - \sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\sqrt{q_3} = k_0;\ \sqrt{q_3}\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2} = k_2;$$
$$\sqrt{q_2}\sqrt{q_3} - \sqrt{q_1} = k_1;\ \sqrt{q_1}\sqrt{q_2} - \sqrt{q_3} = k_3;\ k_0 k_1 k_2 k_3 = k^4$$

so wird wegen (43.):

$$\sqrt{D_\nu} = \frac{k_0 k_\nu}{k^2}$$

also:

$$\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\sqrt{D_3} + \sqrt{D_1} + \sqrt{D_2} + \sqrt{D_3} = \frac{k_0}{k^2}(k_0 + k_1 + k_2 + k_3)$$
$$= \frac{k_0}{k^2}(1 - \sqrt{q_1})\,(1 - \sqrt{q_2})\,(1 - \sqrt{q_3})$$
$$\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\sqrt{D_3} + \sqrt{D_1} - \sqrt{D_2} - \sqrt{D_3} = \frac{k_0}{k^2}(k_0 + k_1 - k_2 - k_3)$$
$$= \frac{k_0}{k^2}(1 - \sqrt{q_1})\,(1 + \sqrt{q_2})\,(1 + \sqrt{q_3})$$

und zyklisch weiter. Aus (10.) folgt damit:

$$\mathfrak{D} = \frac{k_0^4}{k^8}[(1 - q_1)\,(1 - q_2)\,(1 - q_3)]^2$$

oder:

$$(44.)\qquad \boxed{\mathfrak{D} = \left[\frac{(1 - \sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\sqrt{q_3})\,(1 - q_1)\,(1 - q_2)\,(1 - q_3)}{(\sqrt{q_2}\sqrt{q_3} - \sqrt{q_1})\,(\sqrt{q_3}\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2})\,(\sqrt{q_1}\sqrt{q_2} - \sqrt{q_3})}\right]^2}.$$

[1]) Siehe S. 69, Anm. 1 loc. cit. Seite 194.

Auch dieser Ausdruck ändert sich nicht, wenn zwei der Wurzeln $\sqrt{q_\nu}$ zugleich das Vorzeichen wechseln, er geht in $\mathfrak{D}(D_1^*, D_2^*, D_3^*)$ über, wenn dies nur bei einer oder bei allen dreien geschieht. Da die Vertauschung von $q_\nu$ mit $1/q_\nu$ dieselbe Wirkung wie die Transposition im Paar $(E_\nu, \bar{E}_\nu)$ hat, so muß sich $\mathfrak{D}$ dabei verhalten, wie $\mathfrak{d}$ in Gleichung (9.).

Wegen (43.) ist:

$$1 - D_\nu = \frac{\sqrt{q_\nu}\,(q_\lambda - 1)\,(q_\mu - 1)}{(\sqrt{q_\mu}\sqrt{q_\nu} - \sqrt{q_\lambda})\,(\sqrt{q_\lambda}\sqrt{q_\nu} - \sqrt{q_\mu})};$$

damit können wir (44.) in eine Relation zwischen den D. V. $D_\nu$ und dem Produkt $\sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\sqrt{q_3}$, allein überführen, nämlich in:

$$(45.) \qquad \boxed{\frac{\mathfrak{D}}{\prod_\nu (1 - D_\nu)} = \frac{(1 - \sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\sqrt{q_3})^2}{\sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\sqrt{q_3}}}$$

Für die Diskriminante $\mathfrak{d}$ bekommen wir schließlich aus (10.) mit Hilfe von (34.) die Gleichung:

$$(46.) \qquad \frac{\mathfrak{d}}{\prod_\nu (1 - d_\nu)^2} = \frac{(1 - \sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\sqrt{q_3})\,(\sqrt{q_2}\sqrt{q_3} - \sqrt{q_1})\,(\sqrt{q_3}\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2})\,(\sqrt{q_1}\sqrt{q_2} - \sqrt{q_3})}{16\,q_1 q_2 q_3},$$

aus welcher man leicht erkennt, für welche Werte der $q_\nu$ sie verschwindet.

Die Gleichung (25.) kann auch auf ganz elementare Weise wie folgt gewonnen werden. Man sucht zunächst aus den beiden Multiplikatoren $q_1, q_2$ zweier Substitutionen $S_1$, $S_2$ und dem D. V. $D_3$ ihrer Fixpunkte den Charakter der Substitution $S_1 S_2$ zu bestimmen. Denkt man sich $S_1 S_2$ in der Form (31.) angeschrieben, so findet man:

$$(47.) \qquad \alpha + \delta = \frac{1 + q_1 q_2 - D_3\,(q_1 + q_2)}{\sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\,(1 - D_3)},$$

woraus nebenbei folgt, daß sie für $D_3 = \left(\frac{1 - \sqrt{q_1}\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}}\right)^2$ und $D_3 = \left(\frac{1 + \sqrt{q_1}\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}\right)^2$ parabolisch wird.

Führt man nun $i_3$ durch (35.) ein und löst nach $D_3$ auf, so ergibt sich:

$$D_3 = \frac{1 + q_1 q_2 - 2\sqrt{i_3}\sqrt{q_1}\sqrt{q_2}}{q_1 + q_2 - 2\sqrt{i_3}\sqrt{q_1}\sqrt{q_2}}.$$

Hieraus folgt mit (35.) und (37.):

$$(48.) \qquad I_3 = \left(\frac{\sqrt{i_1}\sqrt{i_2} - \sqrt{i_3}}{\sqrt{i_1 - 1}\sqrt{i_2 - 1}}\right)^2$$

und daraus sofort die Gleichung (25.).

## § 4. Über eine besondere Lage von drei bzw. vier Punktepaaren in der Ebene.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu: Welchen Bedingungen muß man die D. V. von $(n+1)$ Punktepaaren $e_\lambda \bar{e}_\lambda$ unterwerfen $(\lambda = 1, 2, \ldots n+1)$, damit es möglich ist, durch dieselben $(n+1)$ Kreise zu legen, von denen keiner die übrigen

trennt oder trifft. Sie werde in der Weise spezialisiert, daß die Punktepaare symmetrisch zu einem Kreise, etwa zur reellen Achse, liegen.

Wir bezeichnen die D. V. durch:

$$d_{\lambda\mu} = (e_\lambda \bar{e}_\lambda e_\mu \bar{e}_\mu) \qquad \left\{\begin{matrix}\lambda, \mu = 1, 2 \ldots n+1 \\ \lambda \neq \mu\end{matrix}\right\} \tag{49.}$$

und bilden daraus die Invarianten:

$$\sqrt{i_{\lambda\mu}} = \frac{1 + d_{\lambda\mu}}{1 - d_{\lambda\mu}}. \tag{50.}$$

Zwischen diesen bestehen dann:

$$\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

identische Relationen. $i_{\lambda\mu}$ ist nach (35.) die Invariante der Substitution $u_\lambda u_\mu$, wo $u_\lambda$ die involutorische Substitution mit den Fixpunkten $e_\lambda, \bar{e}_\lambda$ bedeutet. Die Idee, nach der wir vorgehen wollen, ist nun folgende: Wir setzen $n$ der Paare als gegeben voraus und fragen, in welchem Gebiet der komplexen Ebene darf das $(n+1)$-te Paar *nicht* liegen, wenn die Kreise der verlangten Art möglich sein sollen. Das so definierte Gebiet möge das „verbotene Gebiet" heißen. Um dieses Gebiet aufzufinden, legen wir durch die $n$ gegebenen Punktepaare in der Reihenfolge $1\,2 \ldots n$ eine Kette voneinander berührenden Kreisen und schließen diese Kette durch einen Kreis $K$. Schneiden sich keine zwei Kreise dieser Kette, dann gehört das von $K$ begrenzte außerhalb der Kette liegende Gebiet sicher nicht zum „verbotenen". Andererseits stellt der Kreis $K$ für diese eine Lage der übrigen Kreise gerade die Grenze des „erlaubten" Gebiets dar, die verschiedenen Lagen des Kreises $K$ werden also die Grenzkurve des „verbotenen Gebiets" umhüllen.

Der reelle Endpunkt der Kette geht aus dem Anfangspunkt, wie man unmittelbar sieht, vermöge der Substitution $S_{(n)} = u_1 u_2, \ldots, u_n$ hervor. Schreibt man diese in der Gestalt (31.), so findet man als Enveloppe von $K$ das Kreispaar mit Gleichung:

$$\gamma(x^2 + y^2) - (\alpha - \delta)x - \beta \pm 2y = 0\,. \tag{51.}$$

Für $y = 0$ ergeben sich hieraus die Fixpunkte von $S_{(n)}$. Für den Quotienten aus Radius $\mathfrak{r}$ und Mittelpunktsordinate erhält man

$$\boxed{\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{y}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2 = i_{(n)}} \tag{52.}$$

d. h. gleich der Invariante von $S_{(n)}$. Da $i_{(n)}$ hier stets positiv ist, so ist auch das Kreispaar reell. Es folgt weiter, daß seine beiden Kreise einander schneiden, berühren, oder gar keinen Punkt gemein haben, je nachdem $S_{(n)}$ hyperbolisch, parabolisch, elliptisch ist. Im ersten Fall gehört die Doppelsichel, im zweiten und dritten das Kreisscheibenpaar zum „verbotenen Gebiet". Die Bedingung dafür, daß das Paar $(e_{n+1}, \bar{e}_{n+1})$ nicht in diesem verbotenen Elementargebiet liegt, erhält man mit $(e_{n+1}, \bar{e}_{n+1})$ an Stelle von $(x \pm iy)$ aus (51.), wenn man zugleich die Substitution $S_{(n+1)} = S_{(n)}\, u_{n+1}$ bildet. Sie lautet:

$$\boxed{i_{(n+1)} - 1 > 0} \tag{53.}$$

wo $i_{(n+1)}$ die Invariante von $S_{(n+1)}$ bedeutet.

Ändert man nun in $S_{(n+1)}$ die Reihenfolge der Substitutionen $u_\lambda$, so erhält man insgesamt:

$$\frac{(n+1)!}{2(n+1)} = \frac{n!}{2}$$

solcher Elementargebiete und Ungleichungen, da $i_{(n+1)}$ durch zyklische Vertauschung und Umkehrung der $u_\lambda$ nicht geändert wird. Liegt $(e_{n+1}, \bar{e}_{n+1})$ in einem dieser Elementargebiete, so wird die betreffende Substitution $S_{(n+1)}$ elliptisch. Im Fall $n = 2$ gibt es nur ein einziges Elementargebiet, welches stets die Sichelform hat, da $i_{(2)} > 1$ ist. Diese Doppelsichel macht das ganze „verbotene Gebiet" aus. Sie ist invariant gegenüber den Substitutionen der Gruppe $(u_1, u_2)$.

Die beiden Paare $(e_1, \bar{e}_1)$ und $(e_2, \bar{e}_2)$ liegen in ihrem Innern, da $(u_1 u_2) u_1$ und $(u_1 u_2) u_2$ elliptisch sind (*Figur* 1).

Die Bedingung (53.) lautet:

(54.) $$\boxed{2\sqrt{i_{12}}\sqrt{i_{23}}\sqrt{i_{31}} - i_{12} - i_{23} - i_{31} > 0}$$

Im Fall $n = 3$ gibt es drei Elementargebiete $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{E}'''$, entsprechend den drei Substitutionen:

$$S'_{(3)} = u_3 u_1 u_2;\ S''_{(3)} = u_1 u_2 u_3;$$
$$S'''_{(3)} = u_2 u_3 u_1 .$$

Da alle drei zur selben Klasse gehören, sind die drei Elementargebiete wegen (52.) einander ähnlich. $u_\lambda$ transformiert $\mathfrak{E}^{(\mu)}$ in $\mathfrak{E}^{(\nu)}$

$$[\{\lambda \dotplus \mu \dotplus \nu\} = 1, 2, 3].$$

Die drei Punktepaare $(e_\lambda, \bar{e}_\lambda)$ liegen außerhalb der Elementargebiete. Würde nämlich z. B $e_1, \bar{e}_1$ in $\mathfrak{E}''$ liegen, so müßte die Substitution $u_1 u_2 u_3 u_1$ elliptisch sein, sie ist aber hyperbolisch.

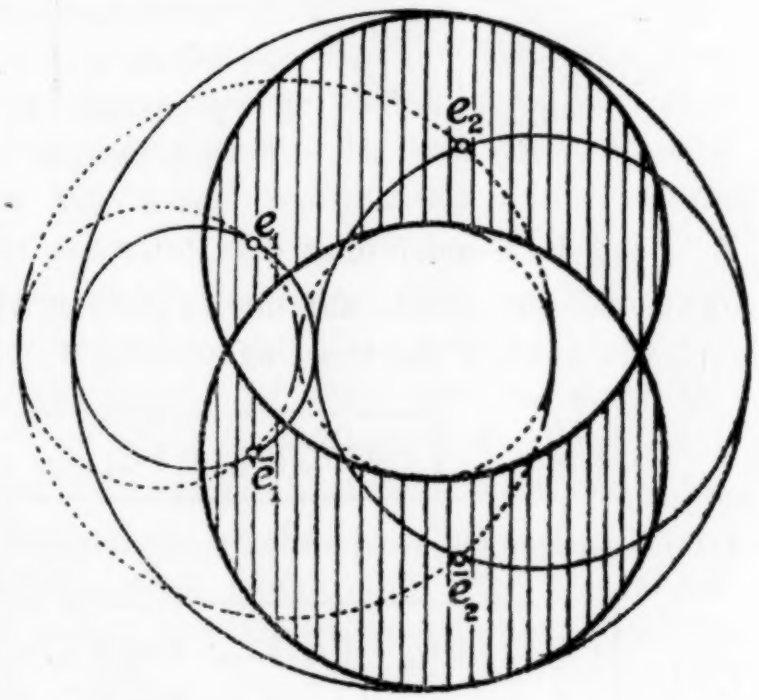



*Fig. 1.*

Ferner haben keine zwei Elementargebiete ein Gebiet gemein. Denn wäre dies der Fall, so gäbe es mindestens ein Punktepaar $(e_4, \bar{e}_4)$, so daß z. B.

$$u_1 u_2 u_3 u_4 \text{ und } u_3 u_1 u_2 u_4$$

zugleich elliptisch würden. Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß dies für die beiden Substitutionen:

$$(u_1 u_2)(u_3 u_4) \text{ und } (u_1 u_2)(u_4 u_3)$$

oder, wenn wir $u_1 u_2 = S_1$; $u_3 u_4 = S_2$ setzen, für die Substitutionen $S_1 S_2$ und $S_1 S_2^{-1}$ der Fall ist, was nach dem auf Seite 79 bewiesenen Satz unmöglich ist.

Wenn das einzelne Elementargebiet aus zwei Kreisscheiben besteht, ist damit die Lage der drei Gebiete und Punktepaare geklärt. Nicht so im Fall der Doppelsicheln, wo es zunächst denkbar wäre, daß zwei derselben durch die

dritte getrennt werden. Dies kann jedoch nicht sein, denn sonst müßten auch die Punktepaare $(e_\lambda, \bar{e}_\lambda)$ durch die Sicheln voneinander getrennt werden, was aus folgendem Grunde unmöglich ist: Würden z. B. $(e_1, \bar{e}_1)$ und $(e_2, \bar{e}_2)$ durch $\mathfrak{E}_1$ getrennt, dann würden sich die Fixpunktepaare der Substitutionen $u_3 u_1 u_2$ und $u_2 u_1$ trennen, und da sie beide hyperbolisch sind, würde ihr Produkt ebenfalls hyperbolisch sein müssen. Das Produkt ist aber: $u_3 u_1 u_2 u_2 u_1 = u_3$, also elliptisch.

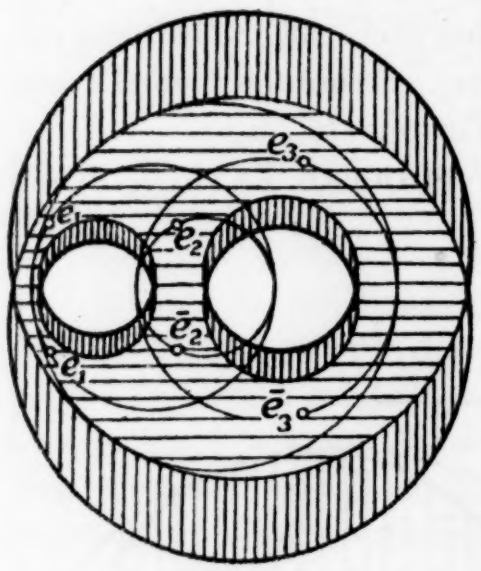


*Fig. 2.*

Folglich liegen die drei Gebiete stets so, wie in Fig. 2 angegeben ist. Sie machen aber hier noch nicht das ganze „verbotene Gebiet" aus. Dies folgt daraus, daß im Falle der Kreisscheiben die ganze Ebene verboten sein muß, weil wegen $i_3 < 1$ schon durch die ersten drei Punktepaare keine Kreise der verlangten Art gelegt werden können. Betrachten wir in der Tat die Berandung desjenigen Gebiets, in dem die Punktepaare liegen, so zeigt sich, daß sie von solchen Kreisen $K$ umhüllt wird, welche zu sich selbst schneidenden Kreisketten gehören (Fig. 2.) Diese ganze Berandung fällt also aus der Begrenzung des „verbotenen Gebiets" heraus, d. h. das Gebiet, in dem die Punktepaare liegen, gehört auch noch zum „verbotenen".

Ist die Bezeichnung der Punktepaare so gewählt, daß die $e_\lambda$ alle auf der positiven, die $\bar{e}_\lambda$ alle auf der negativen Halbebene liegen, so sind die $\sqrt{i_{\lambda\mu}} > 1$ und wir können die drei Ungleichungen (53.) zusammenfassen in:

$$(55.) \qquad \boxed{(\pm\sqrt{i_{23}}\sqrt{i_{14}} \pm \sqrt{i_{31}}\sqrt{i_{24}} \pm \sqrt{i_{12}}\sqrt{i_{34}})^2 - 1 > 0}.$$

Das Zusatzgebiet wird dann ausgeschieden durch die Ungleichung:

$$(55a.) \qquad \boxed{\begin{array}{c}(-\sqrt{i_{23}}\sqrt{i_{14}} + \sqrt{i_{31}}\sqrt{i_{24}} + \sqrt{i_{12}}\sqrt{i_{34}} - 1)(\sqrt{i_{23}}\sqrt{i_{14}} - \sqrt{i_{31}}\sqrt{i_{24}} + \sqrt{i_{12}}\sqrt{i_{34}} - 1) \\ (\sqrt{i_{23}}\sqrt{i_{14}} + \sqrt{i_{31}}\sqrt{i_{24}} - \sqrt{i_{12}}\sqrt{i_{34}} - 1) < 0\end{array}}.$$

Statt ihrer hätte man auch diejenige wählen können, welche aus ihr entsteht, wenn man das Vorzeichen von 1 umkehrt, denn unter der Voraussetzung (55.) folgt eine aus der andern. *Die Ungleichungen* (55.) *und* (55a.) *sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß durch die vier einen gemeinschaftlichen Symmetriekreis besitzenden Punktepaare* $(e, \bar{e})$ *vier Kreise gelegt werden können, welche einander weder treffen noch trennen.*

Der hier behandelte symmetrische Fall wird durch folgende Ungleichungen charakterisiert:

$$\text{A.)} \quad i_{\lambda\mu} + i_{\mu\nu} + i_{\nu\lambda} - 2\sqrt{i_{\lambda\mu}}\sqrt{i_{\mu\nu}}\sqrt{i_{\nu\lambda}} - 1 < 0$$
$$\text{B.)} \quad \sqrt{i_{\lambda\mu}} > 1 \qquad \binom{\lambda \neq \mu \neq \nu}{=1,2,3,4}.$$

Dabei genügt, wenn alle Ungleichungen der Form B.) erfüllt sind, eine einzige

der Form A.) Die vier Ungleichungen der Form (54.) sind zwar notwendig, aber nicht hinreichend. Sie folgen unter Berücksichtigung von A.) und B.) aus (55.) und (55 a.), wenn man noch die zwischen den sechs Größen $\sqrt{i_{\lambda\mu}}$ bestehende Relation

$$(56.) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{i_{12}} & \sqrt{i_{13}} & \sqrt{i_{14}} \\ \sqrt{i_{21}} & 1 & \sqrt{i_{23}} & \sqrt{i_{24}} \\ \sqrt{i_{31}} & \sqrt{i_{32}} & 1 & \sqrt{i_{34}} \\ \sqrt{i_{41}} & \sqrt{i_{42}} & \sqrt{i_{43}} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

beachtet. Dieselbe geht mit: $\sqrt{i_{\lambda\mu}} = + \cos \varphi_{\lambda\mu}$ in die bekannte Beziehung zwischen den Seiten und Diagonalen $\varphi_{\lambda\mu}$ eines sphärischen Vierecks über [1]).

## § 5. Klassifikation der Substitutionenpaare.

In § 3 wurde gezeigt, daß zu jeder aus einem Paar linearer Substitutionen $(S_1, S_2)$ ohne gemeinsamen Fixpunkt erzeugten Gruppe $\Gamma$ eine Gruppe $\Gamma'$ gehört, welche durch drei involutorische Substitutionen erzeugt werden kann und $\Gamma$ als ausgezeichnete Untergruppe vom Index zwei enthält. Es liegt deshalb nahe, die Untersuchung und Klassifikation der Gruppen $\Gamma$ zurückzuführen auf die der Gruppen $\Gamma'$.

Dies hat den Vorteil, daß die Erzeugenden der neuen Gruppen Elementarsubstitutionen sind, die sich nicht dem Charakter nach, sondern nur durch die Lage ihrer Fixpunkte voneinander unterscheiden, und deren einzelne durch ihre beiden Fixpunkte vollkommen bestimmt ist. Die Klassifikation der Gruppen $\Gamma'$ aber werden wir zu gründen haben auf die wesentlich verschiedenen möglichen Lagen dreier Punktepaare, d. h. der Fixpunkte der drei involutorischen Erzeugenden, in der komplexen Ebene, und diese Lagen finden ihren analytischen Ausdruck in den drei D. V. $d_1, d_2, d_3$ (§ 1.), welche zur eindeutigen Definition sowohl von $\Gamma'$ als von $\Gamma$ genügen.

Eine *erste Hauptabteilung* wird durch reelle $d_\nu$ charakterisiert ($\nu = 1, 2, 3$) und soll Gegenstand der weiteren Betrachtungen sein. Bekanntlich liegen in diesem Falle je zwei der Punktepaare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ auf einem Kreis. Eine weitere Unterteilung bewirkt das Vorzeichen der Diskriminante $\mathfrak{d}$. Wir unterscheiden:

$$\text{I. } \mathfrak{d} > 0 \qquad \text{II. } \mathfrak{d} < 0$$

Nach dem Satze am Ende des § 1 liegen die drei Punktepaare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ im Fall I. alle auf demselben, im Fall II. auf drei verschiedenen Kreisen. Da ferner das Vorzeichen von $d_\nu$ über den Charakter von $S_\nu$ entscheidet, so zerfällt jede Unterabteilung, wenn man zunächst von den parabolischen Substitutionen, bei denen $d_\nu$ Null oder unendlich wird, absieht, in vier Kategorien, nämlich:

[1]) Vgl. *C. W. Baur*, Mathematische und geodätische Abhandlungen. Stuttgart 1890. S. 95.

| | 1. | 2. | 3. | 4, |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | − | − | − | + |
| $d_2$ | − | − | + | + |
| $d_3$ | − | + | + | + |

Nach der am Schluß von § 1 gemachten Bemerkung ist aber die Vorzeichenkombination 2. und 3. mit $\mathfrak{d} < 0$ nicht verträglich, so daß also in der II. Unterabteilung nur die Kategorien 1. und 4. auftreten können, ferner läßt sich bei einem vorgelegten Tripel $d_1, d_2, d_3$ der vierten Kategorie unter Umständen ohne Rechnung feststellen, zu welcher Unterabteilung es gehört. Es gilt nämlich der Satz:

„Ein Tripel von positiven Werten $d_\nu$ gehört der I. Unterabteilung an, wenn eine ungerade Anzahl derselben größer als Eins ist."

Diese Bedingung ist aber nicht notwendig.

Wenden wir uns nun zu den D. V. $D_\nu$, welche aus den die Paare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ harmonisch trennenden Paaren $(E_\nu, \overline{E}_\nu)$, d. h. den Fixpunkten der Substitutionen $S_\nu$ gebildet sind, so sind wir vermöge der Gleichungen (27.) und (29.) in der Lage, folgende Aussagen zu machen: Bei der I. Unterabteilung ist

$\mathfrak{d} > 0$ und in der

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|
| $D_1 > 0$ | $\lvert D_1\rvert = 1$ | $D_1 > 0$ | $D_1 > 0$ |
| $D_2 > 0$ | $\lvert D_2\rvert = 1$ | $\lvert D_2\rvert = 1$ | $D_2 > 0$ |
| $D_3 > 0$ | $D_3 > 0$ | $\lvert D_3\rvert = 1$ | $D_3 > 0$ |
| $\mathfrak{D} < 0$ | | | $\mathfrak{D} > 0$ |

Kategorie:

während bei der II. Unterabteilung

$\mathfrak{d} < 0$ und in der

| | |
|---|---|
| 1. Kategorie sämtliche $D_\nu < 0$ | $\mathfrak{D} < 0$ |
| 4. Kategorie sämtliche $D_\nu < 0$ | $\mathfrak{D} > 0$ |

sind.

Bezeichnen wir das Tripel $D_\nu$ als das zum Tripel $d_\nu$ polare, so können wir sagen: *Die Kategorien I. 1. und II. 4. sind zueinander, die Kategorien I. 4. und II. 1. dagegen zu sich selbst polar.*

Die bisher durchgeführte Gliederung läßt unmittelbar folgende Sätze erkennen:

„Zwei elliptische (hyperbolische) Substitutionen, deren Fixpunkte auf einem Kreis liegen und sich trennen, erzeugen eine elliptische (hyperbolische) Substitution und gehören zur Kategorie II. 1. (II. 4.)."

„Zwei elliptische (hyperbolische) Substitutionen, deren Fixpunkte auf einem Kreis liegen, ohne sich zu trennen, gehören zur Kategorie I. 1. oder I. 2. (I. 3. oder I. 4.)."

Ehe wir in der Gliederung weiter fortschreiten, haben wir uns den bisher unterdrückten Tripeln von Substitutionen $S_\nu$ zuzuwenden, in denen parabolische vorkommen. Hier wird sich sogleich zeigen, daß diese Fälle gerade die Lücken zwischen obigen Kategorien ausfüllen.

Ist zunächst nur eine der drei Substitutionen, etwa $S_3$ parabolisch, so können wir $d_3 = 0$ setzen [1]) und bekommen $\mathfrak{d} = (d_1 - d_2)^2$, also stets $\mathfrak{d} > 0$. Diese Fälle schieben sich also zwischen I. 1. und I. 2., bzw. I. 2. und I. 3., bzw. I. 3. und I. 4. als Grenzfälle ein, indem sie einen kontinuierlichen Übergang zwischen denselben vermitteln.

Sind zwei der Substitutionen $S_\nu$, etwa $S_2$ und $S_3$ parabolisch, so dürfen wir $d_2 = d_3 = 0$ annehmen [1]). Dann wird: $\mathfrak{d} = d_1^2 > 0$. Wir bekommen also dem Vorzeichen von $d_1$ gemäß zwei Möglichkeiten, welche sich zwischen die eben genannten drei Grenzfälle einordnen.

Wenn alle drei Substitutionen parabolisch sind, können zwei Fälle eintreten: Im ersten dürfen wir die Annahme machen: $d_1 = d_2 = d_3 = \infty$, welche $\mathfrak{d} = \infty$ zur Folge hat [1]). Hier sind die drei parabolischen Fixpunkte voneinander verschieden, also liegen die drei Paare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ auf einem Kreis, und wir haben somit den Übergang zwischen den beiden zuletzt genannten Grenzfällen vor uns. — Im zweiten Falle ist die Annahme $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ statthaft, womit $\mathfrak{d}$ ebenfalls verschwindet. Hier fallen die drei parabolischen Fixpunkte in einen zusammen, die drei Kreise, welche je zwei der Punktepaare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ enthalten, sind also voneinander verschieden, dieser Fall ist somit als ein Grenzfall anzusprechen, welcher zur zweiten Unterabteilung hinüberleitet. Er gehört zu den durch

$$\frac{\mathfrak{d}}{\prod_\nu (1 - d_\nu)^2} = 0 \tag{57.}$$

charakterisierten besonderen Gruppen, welche weiter unten zu besprechen sein werden

Tripel $S_\nu$ mit parabolischen Substitutionen treten also in der zweiten Unterabteilung ($\mathfrak{d} < 0$) überhaupt nicht auf, während sie sich in der ersten ($\mathfrak{d} > 0$) nach folgendem Schema als Grenzfälle einordnen:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | $-$ | $\boxed{-}$ | $-$ | $\boxed{-}$ | $-$ | $\boxed{0}$ | $+$ | | $-$ | $\boxed{-}$ | $-$ | $\boxed{0}$ | $+$ | | $-$ | $\boxed{\infty}$ | $+$ | |
| $d_2$ | $-$ | $\boxed{-}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\boxed{+}$ | $+$ | | $0$ | $\boxed{0}$ | $0$ | $\boxed{0}$ | $0$ | | $0$ | $\boxed{0}$ | $0$ | |
| $d_3$ | $-$ | $\boxed{0}$ | $+$ | $\boxed{+}$ | $+$ | $\boxed{+}$ | $+$ | | $-$ | $\boxed{0}$ | $+$ | $\boxed{+}$ | $+$ | | $0$ | $\boxed{0}$ | $0$ | |

Die durch (57.) gekennzeichneten Fälle fassen wir in eine *dritte Unterabteilung* zusammen, welche wegen (13.) auch durch

$$\boxed{i_1 + i_2 + i_3 - 2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3} - 1 = 0}$$

[1]) Die andere Möglichkeit ist: $d_3 = \infty$. Durch passende Wahl in der Bezeichnung der Punktepaare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ können wir jedoch stets bewirken, daß in dem vorliegenden Fall die Annahme: $d_3 = 0$ die richtige ist.

Aus demselben Grunde kann bei zwei parabolischen Substitutionen stets die Annahme: $d_2 = d_3 = 0$ gemacht werden. Bei drei parabolischen Substitutionen können jedoch zwei verschiedene Fälle eintreten, welche im wesentlichen charakterisiert werden durch die Annahmen:

$$d_1 = d_2 = d_3 = \infty = \mathfrak{d}, \text{ und: } d_1 = d_2 = d_3 = 0 = \mathfrak{d}$$

Diese beiden Fälle unterscheiden sich, wie man auch die Punkte innerhalb der Paare anordnet, dadurch, daß der Quotient in (57.) im ersten Fall gleich Eins, im zweiten gleich Null wird. Im ersten Fall haben wir etwa zu setzen: $\bar{e}_1 = e_2$; $\bar{e}_2 = e_3$; $\bar{e}_3 = e_1$; im zweiten dagegen $\bar{e}_1 = \bar{e}_2 = \bar{e}_3$. (Siehe auch Gl. (8.).)

definiert werden kann. Die Gleichung (57.) ist erfüllt, wenn die drei Punktepaare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ einer Involution angehören, d. h. wenn die Substitutionen $S_\nu$ beide Fixpunkte gemein haben. Aber hierher gehören auch alle diejenigen Fälle, wo die $S_\nu$ nur einen Fixpunkt gemein haben, und welche sich der hier befolgten Methode insofern entziehen, als die drei Paare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ alle in den gemeinsamen Fixpunkt der $S_\nu$ zusammenfallen. Daß dabei (57.) erfüllt ist, zeigt Gleichung (46.), denn der Multiplikator des Produkts zweier Substitutionen, welche einen Fixpunkt gemein haben, ist entweder das Produkt oder der Quotient ihrer Multiplikatoren.

Für lauter positive bzw. lauter negative $d_\nu$ gilt in der Unterabteilung III. die Darstellung (11.).

Den Anlaß zu einer weiteren Gliederung gibt nun die Frage, ob es möglich ist, durch die drei Punktepaare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ drei einander weder treffende noch trennende Kreise zu legen. Die Frage ist deshalb von Bedeutung, weil durch drei solche Kreise ein funktionentheoretisch brauchbarer Fundamentalbereich für die durch die $u_\nu$ erzeugte Gruppe $\Gamma'$ begrenzt wird. Die zu demselben bezüglich $\Gamma'$ homologen Bereiche reihen sich dann glatt nebeneinander und liefern in ihrer Gesamtheit eine schlichte, mit Ausnahme einer perfekten Menge von Grenzpunkten lückenlose Überdeckung der ganzen Ebene [1]). Zwei benachbarte dieser homologen Bereiche bilden zusammen einen Fundamentalbereich für die in $\Gamma'$ ausgezeichnete Untergruppe $\Gamma$ vom Index zwei, welche weder elliptische, noch parabolische Substitutionen enthält und von der Art der von *Schottky* näher untersuchten Gruppen ist [2]).

Sind die drei Kreise nicht möglich, so kann $\Gamma$ zwar trotzdem vom *Schottky*schen Typ sein, aber die durch $S_\nu$ getroffene Auswahl von Erzeugenden gestattet nicht mehr die Konstruktion eines Fundamentalbereichs der obigen Art.

Fragen wir nun nach der Möglichkeit der Kreise, so können hier lediglich die Kategorien I. 4. und II. 4. in Betracht kommen. Bei I. 4. ist einfach zu fordern, daß keines der Paare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ die zwei andern Paare voneinander trennt. Diese Kategorie zerfällt also in die Typen:

$$(58.)\quad \begin{cases} \text{a)}\ \prod_\nu (1 - d_\nu) < 0, \text{ wo die Kreise möglich sind, und} \\ \text{b)}\ \prod_\nu (1 - d_\nu) > 0, \text{ wo sie nicht möglich sind.} \end{cases}$$

Ein kontinuierlicher Übergang zwischen beiden Typen ist nicht möglich, weil im Grenzfall mindestens eines der Paare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ ausartet.

Die analoge Typeneinteilung der Kategorie II. 4. erledigt sich mit Hilfe der Überlegungen des § 4. Die dortige Ungleichung (54.) liefert das Kriterium für die drei hier vorkommenden Typen:

$$(59.)\quad \begin{matrix} \text{a)} \\ \text{b)} \\ \text{c)} \end{matrix} \quad \frac{\mathfrak{d}}{\prod_\nu (1 - d_\nu)^2} + 1 = i_1 + i_2 + i_3 - 2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3} \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \\ = 0. \end{matrix}$$

[1]) In dieser Beziehung zeigt die Gruppe $\Gamma'$ dasselbe Verhalten wie diejenige Gruppe, welche durch die Spiegelungen an den drei Kreisen erzeugt wird. (Vgl. Aut. I. Seite 436.)

[2]) Vgl. S. 65. Anm. 1. loc. cit. Seite 217.

Hierbei entsprechen die Typen a) und b) den gleichnamigen in der Kategorie I. 4., während c) die Fälle umfaßt, wo gerade noch drei einander berührende und nicht trennende Kreise möglich sind, aber drei einander nicht treffende und nicht trennende Kreise nicht gezogen werden können.

Es soll nun noch der Anschluß an die im ersten Band der Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen von *Fricke* und *Klein* aufgestellte Klassifikation hergestellt werden. Das Substitutionenpaar $(S_1, S_2)$ wird dort durch die Invarianten:

$$j_1 = \alpha_1 + \delta_1; \quad j_2 = \alpha_2 + \delta_2; \quad j_{12} = \alpha_1 \alpha_2 + \delta_1 \delta_2 + \beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1$$

charakterisiert, von denen die zwei ersten als positiv vorausgesetzt werden [1]). Durch Transpositionen innerhalb der Paare $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ können wir nun stets bewirken, daß $\sqrt{i_1}$ und $\sqrt{i_2}$ positiv werden. Die so eindeutig festgelegten Invarianten $\sqrt{i_\nu}$ dürfen wir dann wegen (35.) mit den Invarianten $j_1, j_2, j_{12}$ durch die Gleichungen:

$$2\sqrt{i_1} = j_1; \; 2\sqrt{i_2} = j_2; \; 2\sqrt{i_3} = j_{12}$$

in Beziehung setzen. Die Ungleichungen:

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 - j_1 j_2 j_3 - 2 \gtreqless 2,$$

durch welche dort drei „Spezies" von Substitutionenpaaren unterschieden werden [2]), gehen damit über in:

$$(60.) \qquad i_1 + i_2 + i_3 - 2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3} - 1 \gtreqless 0.$$

Diese Ungleichungen sind es aber gerade, welche unsere drei Unterabteilungen charakterisieren. Die aus den Paaren erster Spezies gewonnenen vier Kategorien von hyperbolischen Rotationsgruppen der Gattung $(0, 3)$ [3]) entsprechen also den vier Kategorien der Unterabteilung I., die aus den Paaren zweiter Spezies hervorgehenden elliptischen Rotationsgruppen bzw. hyperbolischen Rotationsgruppen der Gattung $(1, 1)$ dagegen der Kategorie 1. bzw. 4. der Unterabteilung II. Die drei Typen von hyperbolischen Rotationsgruppen der Gattung $(1, 1)$ welche durch:

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 - j_1 j_2 j_3 \gtreqless 0$$

unterschieden werden [4]), stimmen wegen (59.) mit den drei Typen der Kategorie II. 4. überein.

Die Kategorien und Typen werden dort noch enger gefaßt durch Hinzunahme von Bedingungen, welche die Winkel in den „kanonischen Polygonen" betreffen, auf welche wir aber hier nicht näher eingehen. Es sei nur bemerkt, daß die bei der Gattung $(0, 3)$ aufgestellte Forderung $j_{12} \leqq 0$ zusammen mit $j_1 \geqq 0$ und $j_2 \geqq 0$ gleichbedeutend ist mit:

$$(61.) \qquad \prod_\nu \left(\frac{1 + d_\nu}{1 - d_\nu}\right) \leqq 0 \text{ oder } \sqrt{i_1}\sqrt{i_2}\sqrt{i_3} \leqq 0,$$

also unter anderem den Typus b) der Kategorie I. 4. vollständig ausschließt, während die bei der Gattung $(1, 1)$ aufgestellte Forderung $j_1 > 2; \; j_2 > 2; \; j_{12} > 2$ keine weitere Einschränkung darstellt, sondern nur ein Ausdruck für den auf Seite 86 oben ausgesprochenen Satz ist.

---

[1]) Aut. I. S. 337. [2]) Aut. I. S. 338. [3]) Aut. I. S. 345. [4]) Aut. I. S. 354 ff.

Um zu erkennen, inwieweit sich die bei der Klassifikation der Substitutionenpaare $(S_1, S_2)$ gewonnenen Charakterisierungen auch auf die betreffenden durch $S_1, S_2$ bzw. $u_1, u_2, u_3$ erzeugten Gruppen $\Gamma$ bzw. $\Gamma'$ erstrecken, wählen wir als Erzeugende von $\Gamma'$ das neue Tripel:

$$u_1' = u_3\, u_1\, u_3; \quad u_2; \quad u_3.$$

Der Berechnung der Invarianten sind dann die drei Punktepaare:

$$(e_1', \bar{e}_1') = u_3\,(e_1, \bar{e}_1); \quad (e_2, \bar{e}_2); \quad (e_3, \bar{e}_3)$$

zugrunde zu legen. Die D. V. derselben bestimmen sich zu:

$$d_1' = (e_2\, \bar{e}_2\, e_3\, \bar{e}_3) = d_1; \quad d_2' = (e_3\, \bar{e}_3\, e_1'\, \bar{e}_1') = d_2;$$

$$d_3' = (e_1'\, \bar{e}_1'\, e_2\, \bar{e}_2) = \frac{c_3 - c_1 + 2d_3 + (d_3 - 1)\,(d_1 + d_2)}{c_3 - c_1 + 2d_3 + (d_3 - 1)\,(1 + d_1 d_2)}$$

Von den $d_\nu$ zu den $\sqrt{i_\nu}$ übergehend finden wir hieraus die „Modultransformation“:

$$(62.) \qquad \sqrt{i_1''} = \sqrt{i_1}; \; \sqrt{i_2''} = \sqrt{i_2}; \; \sqrt{i_3''} = 2\sqrt{i_1}\sqrt{i_2} - \sqrt{i_3},$$

aus der durch zyklische Vertauschung der Indizes zwei weitere hervorgehen[1]).

Gegenüber diesen Transformationen (62.) ist nun (60.) invariant. Daraus folgt zunächst, daß die Einteilung in die drei Unterabteilungen I., II., III. auch die betreffenden Gruppen erfaßt. Da ferner die Forderung: $i_\nu < 1$ bzw. $i_\nu > 1$ $(\nu = 1, 2, 3)$ innerhalb der Unterabteilung II. ebenfalls invariant ist, so gilt dasselbe für die Kategorien II. 1. und II. 4., sowie für die drei Typen von II. 4. Anders verhält es sich dagegen mit den vier Kategorien der Unterabteilung I., sowie den beiden Typen von I. 4., deren Merkmale keineswegs invariant sind. Führt man noch die Beschränkung (61.) ein, so kann man zwar sagen, die vier Kategorien führen auch zu vier verschiedenen Arten von Gruppen, aber wenn man die Beschränkung (61.) fallen läßt, so definiert in der ersten Unterabteilung nur noch der Typus a) der Kategorie 4 eine besondere Gruppenart. Gemäß (58.) trifft dort (61.) sowieso zu. Dagegen gehören zu den Kategorien I. 1., 1. 2., I. 3. und I. 4. (Typus b) nicht mehr notwendig verschiedenartige Gruppen. In der Tat ist es möglich, ein Tripel von Punktepaaren $(e_\nu, \bar{e}_\nu)$ der Kategorie I. 1. durch Modultransformationen der Reihe nach in eines der zweiten, dritten und vierten Kategorie (Typus b) zu verwandeln, wobei die Gruppe $\Gamma'$ selbst unverändert bleibt.

## § 6. Verallgemeinerung der Zerlegung.

Sollen die $n$ Erzeugenden $S_\nu$ einer Gruppe $\Gamma$ in der Form:

$$(63.) \qquad S_\nu = u_\nu\, u_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

dargestellt werden können, wo die $u_\nu$ involutorische Substitutionen bedeuten, so müssen, wenn $n$ größer als zwei ist, gewisse Bedingungen erfüllt sein. Ihre Anzahl ist:

$$3n - 2(n + 1) = n - 2.$$

[1]) Diese Modultransformation stimmt mit der in Aut. I. S. 397 durch (S) bezeichneten überein. Zu ihr gehört die Transformation:

$$S_1' = S_1\colon\; S_2' = S_2^{-1};\; S_3' = S_2\, S_1^{-1}$$

bei den Erzeugenden der Gruppe $\Gamma$.

Auf Grund der Entwicklungen des § 3 sind wir in der Lage, diese Bedingungen sofort anzugeben.

Wir benennen die Multiplikatoren der Substitutionen $S_\nu$ wieder mit $q_\nu$, ihre Fixpunkte mit $E_\nu$, $\bar{E}_\nu$ und deren D. V. wie folgt:

$$(E_\nu\, \bar{E}_\nu\, E_\mu\, \bar{E}_\mu) = D_{\nu\mu} = D_{\mu\nu} \qquad \left(\begin{smallmatrix}\nu \neq \mu \\ = 1, 2 \ldots n\end{smallmatrix}\right).$$

Das harmonisch trennende Paar von $(E_1, \bar{E}_1)$ und $(E_2, \bar{E}_2)$ sei $(e_2, \bar{e}_2)$, das von $(E_2, \bar{E}_2)$ und $(E_3, \bar{E}_3)$ sei $(e_3, \bar{e}_3)$, usw. Schließlich sei noch:

$$(e_\nu\, \bar{e}_\nu\, e_\mu\, \bar{e}_\mu) = d_{\nu\mu} = d_{\mu\nu}.$$

Dann ist der Multiplikator von $S_2$ wegen (34.) bestimmt durch die Gleichung:

$$q_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{d_{23}}}{1 - \sqrt{d_{23}}}\right)^2. \tag{64.}$$

Wir können $q_2$ auch direkt durch die D. V. der Fixpunkte $(E_\nu, \bar{E}_\nu)$ ausdrücken. Wegen (41.) wird nämlich:

$$q_2 = \frac{(D_{12}\, D_{23}\, D_{31} - D_{12} - D_{23} + D_{31} \pm \sqrt{\mathfrak{D}_{123}})^2}{4\, D_{12}\, D_{23}\, (1 - D_{31})^2} \tag{65.}$$

wo $\mathfrak{D}_{123}$ die Diskriminante der drei D. V. $D_{12}, D_{23}, D_{31}$ bedeutet. Rücken wir in dieser Gleichung die Indizes zyklisch weiter, so erhalten wir der Reihe nach alle gesuchten Beziehungen. Dabei haben wir bis $q_{n-1}$ vorzuschreiten, dann ist die Anzahl derselben gerade $n - 2$, wie es sein soll.

Bei $\boxed{n = 3}$ tritt also nur die eine Relation (65.) auf, welche in dieser Form in Anwendung zu bringen ist, wenn als Moduln der Gruppe die drei D. V. $D_{12}$, $D_{23}$, $D_{31}$ der Fixpunkte und die Multiplikatoren der drei erzeugenden Substitutionen $S_1, S_2, S_3$ betrachtet werden. Bemerkenswert ist hierbei, daß die Relation nur den Multiplikator der mittleren Substitution $S_2$ enthält. Wir wollen die bei $n = 3$ auftretende Bedingung auch noch unter Zugrundelegung eines andern Modulsystems aufstellen. Nimmt man nämlich die vierte durch

$$S_1\, S_2\, S_3\, S_4 = 1 \tag{66.}$$

definierte Substitution $S_4$ hinzu, so kann man als Moduln etwa die Multiplikatoren der folgenden sechs Substitutionen wählen:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_1\, S_2,\ S_2\, S_3$$

oder auch, statt der Multiplikatoren selbst, die in einfacher Weise damit zusammenhängenden Invarianten:

$$j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4,\ j_{12},\ j_{23}.$$

Ist die einzelne Substitution in der Form (31.) gegeben, so ist

$$\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}} = \alpha + \delta = j$$

zu setzen [1]).

Aus dem Ansatz:

$$S_1 = u_1\, u_2;\quad S_2 = u_2\, u_3;\quad S_3 = u_3\, u_4;\quad S_4 = u_4\, u_1 \tag{67.}$$

[1]) Vgl. Gl. (33.), sowie Seite 89.

geht dann wegen (35.) sofort hervor, daß wir die sechs Invarianten durch die folgenden, wie bei (50.) gebildeten Ausdrücke ersetzen dürfen:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{i_{12}},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{i_{23}},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{i_{34}},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{i_{41}},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{i_{13}},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{i_{24}}.$$

Zwischen diesen besteht aber die Gleichung (56.), also zwischen den Invarianten $j$ die folgende:

$$(68.)\qquad \begin{vmatrix} 2 & j_1 & j_{12} & j_4 \\ j_1 & 2 & j_2 & j_{23} \\ j_{12} & j_2 & 2 & j_3 \\ j_4 & j_{23} & j_3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend, Daß sie notwendig ist, geht aus ihrer Herleitung hervor. Hinreichend ist sie aus folgendem Grunde: Sind irgend sechs Invarianten $j_1, j_2, \ldots j_{23}$ vorgelegt, so können wir zunächst rein formal:

$$j_1 = 2\frac{1+d_{12}}{1-d_{12}};\ j_2 = 2\frac{1+d_{23}}{1-d_{23}};\ j_3 = 2\frac{1+d_{34}}{1-d_{34}};\ j_4 = 2\frac{1+d_{41}}{1-d_{41}};\ j_{12} = 2\frac{1+d_{13}}{1-d_{13}};$$

$$j_{23} = 2\frac{1+d_{24}}{1-d_{24}}$$

setzen. Besteht dann zwischen den Invarianten die Gleichung (68.), so existieren auch vier Punktepaare $(e_\lambda, \bar{e}_\lambda)$, als deren D. V. die Größen ($\lambda = 1, 2, 3, 4$) $d_{12} \ldots d_{24}$ aufgefaßt werden können, und damit ist die Existenz der vier involutorischen Substitutionen $u_\lambda$, also die Zerlegung (67.) gewährleistet.

Aus dem Ansatz (67.) geht übrigens hervor:

$$S_1 S_3 = u_1 u_2 u_3 u_4;\ S_2 S_4 = u_2 u_3 u_4 u_1$$

also:

$$(69.)\qquad S_1 S_3 = u_1 (S_2 S_4)\, u_1,\ \text{somit:}\ \boxed{j_{13} = j_{24}}.$$

Diese Relation ist daher als äquivalent mit (68.) anzusehen.

Bei *Fricke-Klein* werden die Invarianten $j$ an zwei Stellen, jedesmal unter einer besonderen Annahme untersucht. Das eine Mal [1]) wird vorausgesetzt, daß es sich um eine Hauptkreisgruppe handelt, das andere Mal [2]), daß eine Gruppe vorliegt, welche durch vier Spiegelungen erzeugt wird. Beide Spezialfälle besitzen einen gemeinschaftlichen Grenzfall, nämlich den, wo beide Voraussetzungen zugleich zutreffen, und welcher seinerseits einen Spezialfall der hier behandelten aus vier elliptischen Substitutionen der Periode zwei erzeugten Gruppen darstellt. So kommt es, daß die hier gewonnenen Gleichungen (68.) und (69.) sich auch dort in beiden Fällen, jedoch unter verschiedener Bedeutung einstellen. Im Hauptkreisfall bedeutet die Gleichung (69.) die Erweiterungsfähigkeit der Gruppe durch Spiegelungen [3]), und umgekehrt charakterisiert die Gleichung (68.) im Spiegelungsfalle eine Hauptkreisgruppe [4]).

Die eigentliche Bedeutung der Gleichung (68.) ist aber nach dem Vorhergehenden darin zu suchen, daß sie die Erweiterungsfähigkeit der Gruppe durch elliptische Substitutionen der Periode zwei gemäß dem Ansatz (67.) zum Ausdruck bringt.

---

[1]) Aut. I. S. 394 ff. [2]) Aut. I. S. 405 ff. [3]) Aut. I. S. 396.

[4]) Aut. I. S. 411. Dort wird deshalb auch die in (68.) auftretende Determinante als „Hauptkreisinvariante“ bezeichnet (S. 409.).

Ansätze von der Art von (67.) gibt es übrigens hier sechs verschiedene. An die Stelle von (66.) können wir nämlich die fünf Gleichungen:

$S_3 S_2 S_1 S_4 = 1$; $S_2 S_3 S_1 S_4 = 1$; $S_1 S_3 S_2 S_4 = 1$; $S_3 S_1 S_2 S_4 = 1$; $S_2 S_1 S_3 S_4 = 1$

der Reihe nach treten lassen. Diese sechs Zerlegungen werden einfach durch die sechs Permutationen der drei Erzeugenden $S_1, S_2, S_3$ charakterisiert. Die jeweils zugehörige Relation findet man aus (68.), indem man dort die entsprechende Permutation der Indizes 1, 2, 3 vornimmt. Aus der Existenz einer der sechs Zerlegungen folgt hier keineswegs die der übrigen, und damit unterscheidet sich der vorliegende Fall sehr wesentlich von dem Fall: $n = 2$ [1]). Sollen zwei Zerlegungen möglich sein, so muß zwischen den drei Substitutionen $S_1$, $S_2$, $S_3$ eine Gleichung bestehen. So fordert das gleichzeitige Bestehen der beiden zu:

$$S_1 S_2 S_3 S_4 = 1 \quad \text{und} \quad S_1 S_3 S_2 S_4' = 1$$

gehörigen Zerlegungen das Erfülltsein der Relation:

$$S_1 S_3 S_2^{-1} S_1^{-1} S_2 S_3^{-1} = 1$$

und wenn man (67.) mit der zu: $S_3 S_2 S_1 S_4' = 1$ gehörigen Zerlegung zusammennimmt, so ist dies nur möglich mit: $S_2^2 = 1$.

Auch hier ist wieder die aus den Substitutionen $S_1, S_2, S_3$ erzeugte Gruppe $\Gamma$ ausgezeichnet vom Index zwei in der Gruppe $\Gamma'$, welche durch die $u_\lambda$ erzeugt wird. Betrachten wir den besonderen Fall, wo die Fixpunkte $(e_\lambda, \bar{e}_\lambda)$ symmetrisch zu einem Kreis, etwa zur reellen Achse liegen, so wird durch die Ungleichungen (55.) und (55 a.) eine besondere Art von Gruppen $\Gamma'$ definiert, nämlich solche, deren Untergruppen $\Gamma$ vom *Schottky*schen Typus sind. Wie bei $n = 2$ wird ein Fundamentalbereich von $\Gamma'$ durch die wegen (55.) und (55 a.) möglichen Kreise begrenzt, welche durch die Paare $(e_\lambda, \bar{e}_\lambda)$ gehen und einander weder treffen noch trennen. Aus diesem Fundamentalbereich erhält man einen für die Gruppe $\Gamma$, indem man ihn mit einem derjenigen vier Bereiche kombiniert, in welche er durch die Substitutionen $u_\lambda$ transformiert wird [2]).

Es sei jedoch bemerkt, daß die Ungleichungen (55.) und (55 a.) nicht, wie (54.), gegenüber den Transformationen der Gruppenmoduln invariant sind, was geometrisch sofort einleuchtet. Man kann nämlich in Figur 2. sehr wohl außerhalb des „verbotenen Gebiets" ein zur reellen Achse symmetrisches Punktepaar $(e_4, \bar{e}_4)$ annehmen, welches in das „verbotene Gebiet" hinein transformiert wird, wenn man es z. B. der Substitution $u_1$ unterwirft. Die zugehörige Modultrausformation lautet:

$$\sqrt{i_{12}'} = \sqrt{i_{12}};\ \sqrt{i_{23}'} = \sqrt{i_{23}};\ \sqrt{i_{31}'} = \sqrt{i_{31}};\ \sqrt{i_{14}'} = \sqrt{i_{14}};\ \sqrt{i_{24}'} = 2\sqrt{i_{12}}\sqrt{i_{14}} - \sqrt{i_{24}};$$
$$\sqrt{i_{34}'} = 2\sqrt{i_{13}}\sqrt{i_{14}} - \sqrt{i_{34}}.$$

Sie läßt in der Tat die Ungleichungen (55.) und (55 a.) nicht alle unverändert.

Es ist also möglich, daß ein Quadrupel von involutorischen Substitutionen $u_\lambda$ eine Gruppe $\Gamma'$ erzeugt, deren ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei, $\Gamma$, vom *Schottky*schen Typus ist, ohne daß die Ungleichungen (55.) und (55 a.) erfüllt sind. Diese Bedingungen sind zwar hinreichend, aber nicht notwendig.

---

[1]) Vgl. S. 79. [2]) Vgl. S. 88.

# Über das elliptische Integral:

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}}\, dx.$$

Von *Alfred Färber* in Stuttgart.

Die Abhandlungen von Herrn *Tchébichef* [1]) und *Weierstraß* [2]) veranlassen mich zu einer Ergänzung. Auf S. 227 spricht Herr *Tchébichef* von dem Fehlen eines Kriteriums über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit, das besagte elliptische Integral in geschlossener Form zu lösen.

Ein solches Kriterium aufzustellen ist der Zweck dieser Zeilen.

Den Ausgangspunkt bildet die Integralgleichung

(1.) $$\underline{(x+a)(x+b)(x+c) = y^2.}$$

Die Gleichung (1.) wurde nun identisch umgeformt:

(2.) $$(x+a)^2(x+d) = y^2 - (abc - a^2 d)$$

also

$$\begin{vmatrix} 2a + d = a + b + c \\ 2ad + a^2 = ab + ac + bc \end{vmatrix}$$

(3.) $$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{a+b+c+\sqrt{(a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc)}}{3} \\ d &= \frac{(a+b+c) - 2\sqrt{(a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc)}}{3}. \end{aligned} \right.$$

Aus (2.) folgt durch Wurzelziehen:

$$(x+a)\sqrt{x+d} = \sqrt{y^2 - (abc - a^2 d)};$$

die Differentiation auf beiden Seiten gibt:

$$dx \cdot \frac{3x + (a+2d)}{2\sqrt{x+d}} = \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 - (abc - a^2 d)}},$$

vermöge (1.) ist aber

$$y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)},$$

also erhält man die Differentialgleichung:

---

[1]) *Liouville*: Journal 2. Série 9. 1864. p. 225 ff.

[2]) *Weierstraß*: „Werke" Bd. 1. p. 227.

$$(4.)\qquad \frac{x+\dfrac{a+2d}{3}}{\sqrt{(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)}}\cdot dx=\frac{\dfrac{2}{3}\,dy}{\sqrt{y^2-(abc-a^2d)}}.$$

Die Integration von (4.) gibt

$$(5.)\qquad \int\frac{x+\dfrac{a+2d}{3}}{\sqrt{(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)}}\,dx=\frac{2}{3}\,\lg\left[y+\sqrt{y^2-(abc-a^2d)}\right].$$

Vergleicht man (5.) mit dem Integral

$$E=\int\frac{x+A}{\sqrt{(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)}}\,dx,$$

so läßt sich also das elliptische Integral $E$ in geschlossener Form lösen, sofern nur

$$(6.)\qquad \left|\begin{array}{l} A=\dfrac{a+2d}{3}\ \text{und nach Gl. (3.)}\\ d=a+b+c-2a \end{array}\right|$$

ist. Die Gleichungen (6.) geben also folgendes *Kriterium*, wonach für *beliebige* Konstanten $a$, $b$, $c$ das elliptische Integral

$$E=\int\frac{x+A}{\sqrt{(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)}}\,dx$$

in *geschlossener* Form gelöst werden kann:

$$\left\{\begin{array}{l} A=\dfrac{a+2d}{3}=\dfrac{a+b+c-\sqrt{(a+b+c)^2-3\,(ab+ac+bc)}}{3}\\ \text{oder}\quad A=\dfrac{a+b+c+3d}{6}\\ \text{und}\quad d=\dfrac{a+b+c-2\sqrt{(a+b+c)^2-3\,(ab+ac+bc)}}{3}. \end{array}\right.$$

# Über das allgemeine Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste im Körper $k_\zeta$ der $l$-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von $k_\zeta$.[1])

Von *Helmut Hasse* in Kiel.

1. Sei $l$ eine ungerade Primzahl, $\zeta$ eine primitive $l$-te Einheitswurzel und $k_\zeta$ der durch $\zeta$ bestimmte Kreiskörper. Es bezeichne ferner $\mathfrak{l}$ den Primteiler von $l$ in $k_\zeta$, also, wenn $\lambda = 1 - \zeta$ gesetzt wird, $\mathfrak{l} = (\lambda)$, $(l) = \mathfrak{l}^{l-1}$.

Das allgemeinste Reziprozitätsgesetz für die $l$-ten Potenzreste in $k_\zeta$ läßt sich in die *Hilbert*sche Formel

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \tag{1.}$$

zusammenfassen, wo $a$, $\beta$ irgendzwei von Null verschiedene (ganze oder gebrochene) Zahlen aus $k_\zeta$ sind, $\mathfrak{p}$ alle Primteiler von $k_\zeta$ durchläuft und $\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ das *Hilbert*sche Normenrestsymbol ist. Sind speziell $a$ und $\beta$ zueinander *kernprim für* $l$, d. h. hat der nach Abspaltung aller $l$-ten Idealpotenzen aus $(a)$ verbleibende *Kern* von $(a)$ mit $(\beta)$ keinen Primfaktor gemeinsam und umgekehrt, so liefert die *Hilbert*sche Formel (1.) das Reziprozitätsgesetz für die $l$-ten Potenzreste in $k$ in der üblichen Form:

$$\left(\frac{a}{\beta}\right) \cdot \left(\frac{\beta}{a}\right)^{-1} = \left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right)^{-1}.$$

Die vollständige Formulierung des Reziprozitätsgesetzes kommt somit auf die Bestimmung der Normenrestsymbole $\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ für den Primteiler $\mathfrak{l}$ von $l$ hinaus[2]).

Man pflegt diese Aufgabe in zwei Teile zu trennen, je nachdem $a$ und $\beta$ prim zu $l$ sind oder nicht. Die aus der ersten, in dieser Arbeit allein behandelten Aufgabe entspringende Formel nennt man das *allgemeine Reziprozitätsgesetz* (inkl. *ersten Ergänzungssatz*), während die zweite zum sogenannten *zweiten Ergänzungssatz* führt, der in einer nachfolgenden Arbeit von Herrn *E. Artin* und mir[3]) behandelt wird.

---

[1]) Die Resultate dieser Arbeit wurden auf der Jahresversammlung der D. M. V., Marburg 1923, vorgetragen.

[2]) Siehe meine Arbeit: *Das allgemeine Reziprozitätsgesetz* . . . . . , ds. Journal Bd. 153, S. 192 ff., wo ich diese Fragestellung für beliebige Oberkörper $k$ von $k\zeta$ zugrundelegte und über die bekannten Resultate hinausgelangte.

[3]) Erscheint im folgenden Hefte dieser Zeitschrift.

2. Während das entsprechende Problem für einen beliebigen Oberkörper $k$ von $k_\zeta$ bisher nur insofern gelöst war, als man hinreichende Bedingungen dafür angeben konnte, daß die fraglichen Normenrestsymbole gleich 1 sind [1]), hat in dem speziellen Grundkörper $k_\zeta$ schon *Kummer* eine explizite Formel für den *Umkehrfaktor* $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$, in *Hilbert*scher Terminologie also für das Normenrestsymbol $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ hergeleitet, allerdings nur in dem von *Kummer* allein behandelten Fall, daß die Klassenzahl von $k_\zeta$ prim zu $l$ ist (*regulärer Kreiskörper*). Die *Kummer*schen Entwicklungen sind von *Hilbert* im „Zahlbericht" (§ 131 ff.) erneut, unter systematischer Verwendung des von ihm eingeführten Normenrestsymbols dargestellt. Die *Kummer-Hilbert*sche Formel für reguläre Kreiskörper [2]) lautet:

$$\text{(2.)} \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{a=1}^{l-1} (-1)^a l_a(\alpha)\, l_{l-a}(\beta)},$$

*wenn* $\alpha, \beta \equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{l}$ *und kernprim zueinander* [3]). Hierin bedeuten die $l_a(\alpha)$ die von *Kummer* eingeführten *logarithmischen Differentialquotienten*, auf die ich unten näher eingehe. Die eingeführte Beschränkung: $\alpha, \beta \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}$ erweist sich als nicht wesentlich verschieden von der oben genannten Voraussetzung: $\alpha, \beta$ prim zu $l$, da im letzteren Falle $\alpha^{l-1}, \beta^{l-1} \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}$ sind, und $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)^{-1} = \left(\frac{\alpha^{l-1}, \beta^{l-1}}{\mathfrak{l}}\right)^{-1}$ ist.

3. Die *Kummer-Hilbert*sche Formel (2.) wurde von *Takagi* [4]), gestützt auf das vorher für beliebige Oberkörper $k$ von beliebigen (auch nicht regulären) $k$ bewiesene Reziprozitätsgesetz (1.) auf weiterhin gegenüber *Kummer* und *Hilbert* erheblich vereinfachtem Wege für beliebige Kreiskörper $k_\zeta$ bewiesen und dabei zugleich die wahre Bedeutung der *Kummer*schen logarithmischen Differentialquotienten klar hervorgehoben. Unter leicht zu verifizierenden Anpassungen der *Takagi*schen Entwicklungen an die *Hensel*schen Methoden können nämlich diese logarithmischen Differentialquotienten folgendermaßen charakterisiert werden:

Sei $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_l$ ein solches unter den unendlich vielen Fundamentalsystemen für die multiplikative Darstellung aller Einseinheiten des *Hensel*schen Erweiterungskörpers $k_\zeta$ (I), dessen Elemente den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_a &\equiv 1 - \lambda^a \text{ mod. } \mathfrak{l}^{a+1} \\ s\varkappa_a &\equiv \varkappa_a^{r^a} \text{ mod. } \mathfrak{l}^{l+1} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(r \text{ primitive Wurzel mod. } l;\ s = (\zeta : \zeta^r) \text{ zugeordnete er-} \\ &\text{zeugende Substitution von } k_\zeta),\ (a = 1, 2, \ldots, l-1) \end{aligned}$$

genügen, und das sich stets, und zwar mod. $\mathfrak{l}^{l+1}$ eindeutig, angeben läßt [5]), und

$$\alpha = \varkappa_1^{e_1} \ldots \varkappa_l^{e_l}\, \alpha_0^l \quad (\mathrm{I});\ (e_a \text{ mod. } l)$$

[1]) Siehe jedoch Anm. 2, S. 96.

[2]) Auch Formel (1.) ist von *Hilbert* nur für reguläre Kreiskörper bewiesen, für beliebige Kreiskörper (und Oberkörper) erst von *Furtwängler* und *Takagi*.

[3]) Die bei *Kummer* und *Hilbert* gemachten weiteren Voraussetzungen, daß $\alpha, \beta$ *ganze zueinander prime* Zahlen aus $k_\zeta$ sind, erweisen sich als unwesentlich, während die im Text genannten wesentlich sind.

[4]) *T. Takagi*, On the Law of Reciprocity in the Cyclotomic Córpus, Tokyo, Okt. 1922, in einer Zeitschrift, deren Titel ich nicht feststellen kann, Ser. 3, Vol. 4, S. 173 ff.

[5]) Siehe *Takagi*, a. a. O.

die eindeutige Darstellung einer beliebigen Einseinheit $a$ von $k_\zeta(\mathfrak{l})$ durch dieses System, wobei alle $l$-ten Potenzen in $k_\zeta(\mathfrak{l})$ in $a_0^l$ zusammengefaßt sind [1]), so hängen die logarithmischen Differentialquotienten von $a$ mit den Exponenten $e_a$ von $a$ durch die Kongruenzen zusammen:

$$l_a(a) \equiv (-1)^{a-1}\, a!\, e_a \bmod. l;\ (a = 1, 2, \ldots, l-1).$$

4. Nun hat Herr *Hensel* vor einiger Zeit durch ihre Potenzreihenentwicklung definierte Logarithmen in die Arithmetik der algebraischen Zahlkörper $k(\mathfrak{p})$ eingeführt [2]). Es lag der Gedanke nahe, die höchst kompliziert definierten logarithmischen Differentialquotienten *Kummer*s durch die *Hensel*schen Logarithmen für den Bereich von $\mathfrak{l}$ zu ersetzen. Diese Aufgabe soll im folgenden gelöst werden. Schon vorweg sei aber bemerkt, daß sich keineswegs die logarithmischen Differentialquotienten *einzeln* als wirkliche (*Hensel*sche) Logarithmen darstellen lassen, sondern daß die resultierende Beziehung verwickelter ist und lediglich die beim Reziprozitätsgesetz (3.) auftretende, bilineare Verbindung

$$\sum_{a=1}^{l-1} (-1)^a\, l_a(\alpha)\, l_{l-a}(\beta)$$

durch *Hensel*sche Logarithmen auszudrücken gestattet. Der *Kummer*sche Prozeß der Koeffizientenbestimmung aus einer logarithmischen Potenzreihe durch *Differenzieren* erscheint dabei durch die *Bildung der Spur* von Ausdrücken, die *Hensel*sche Logarithmen enthalten, also durch einen vom algebraischen Standpunkt viel naturgemäßeren Prozeß, ersetzt.

5. Es seien zunächst kurz die für uns wesentlichen Ergebnisse der genannten *Hensel*schen Arbeit, spezialisiert für den Grundkörper $k_\zeta$, hervorgehoben. Ist

$$a = 1 + \gamma\lambda^a;\ ((\gamma, l) = 1)$$

irgendeine Einseinheit von $k_\zeta$ vom Grade $a \geqq 1$, so konvergiert die $\lambda$-adische Potenzreihe

$$\log a = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(a-1)^\nu}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{\gamma^\nu\, \lambda^{a\nu}}{\nu} \qquad (\mathfrak{l})$$

für den Bereich von $\mathfrak{l}$ und genügt der Funktionalgleichung:

$$\log a + \log \beta = \log a\beta \qquad (\mathfrak{l}).$$

$\log a$ ist stets mindestens von der Ordnung 2 (durch $\mathfrak{l}^2$ teilbar). Es ist ferner dann und nur dann

$$\log a = 0 \qquad (\mathfrak{l}),$$

wenn $a = \zeta^\mu$ eine $l$-te Einheitswurzel ist, so daß allgemein eine Einseinheit durch ihren Logarithmus bis auf $l$-te Einheitswurzeln als Faktoren eindeutig bestimmt ist. Da alle von 1 verschiedenen $l$-ten Einheitswurzeln $\zeta^\mu$ Einseinheiten vom Grade 1 sind, ist die Zordnung von Einseinheiten und Logarithmen nur für die Einseinheiten 1. Grades ein-$l$-deutig, für die höheren Grades eineindeutig.

[1]) Siehe hierzu *K. Hensel* und *H. Hasse*, Über die Normenreste . . ., Math. Ann. 90, S. 265, (2).

[2]) *K. Hensel*, Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für den Bereich eines beliebigen Primteilers. ds. Journ. Bd. 145. S. 92 ff.

6. Ferner sei an die Definition der *Kummer*schen logarithmischen Differentialquotienten erinnert, die wir hier gleich in ihrer allgemeinsten Form für beliebige Einseinheiten von $k_\zeta(\mathfrak{l})$ geben. Ist $a$ eine solche, und

$$a = \varphi(\zeta) \qquad (\mathfrak{l})$$

irgendeine Darstellung von $a$ als ganze rationale Funktion von $\zeta$ (mit *ganzen* $l$-adischen Koeffizienten, was möglich, weil $a$ ganz für $\mathfrak{l}$), so bilde man die Differentialquotienten

$$\left[\frac{d^a \log \varphi(e^v)}{dv^a}\right]_{v=0}; \quad (a = 1, 2, \ldots, l-1).$$

Diese erweisen sich als ganze $l$-adische Zahlen. Die Kongruenzwerte mod. $l$ der $l-2$ ersten sind ferner von der speziellen Darstellung von $a$ als $\varphi(\zeta)$ unabhängig, der letzte ändert sich mod. $l$ um $\dfrac{\varphi(1)-\psi(1)}{l}$, wenn $\varphi(\zeta)$ durch das ihm gleiche $\psi(\zeta)$ ersetzt wird. Die somit mod. $l$ invarianten Ausdrücke

$$l_a(a) \equiv \left[\frac{d^a \log \varphi(e^v)}{dv^a}\right]_{v=0} \text{mod. } l; \quad (a = 1, 2, \ldots, l-2)$$

$$l_{l-1}(a) \equiv \left[\frac{d^{l-1} \log \varphi(e^v)}{dv^a}\right]_{v=0} + \frac{\varphi(1)-1}{l} \text{ mod. } l$$

bezeichnet man als die *Kummer*schen logarithmischen Differentialquotienten von $a = \varphi(\zeta) \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}$.

7. Wir gehen nun aus von der *Kummer-Hilbert-Takagi*schen Formel (2.) für das fragliche Symbol $\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right)^{-1}$. Um die rechte Seite dieser Formel in genannter Weise umzuformen, legen wir das (von dem a. S. 97 unten genannten, *Takagi*schen verschiedene) Fundamentalsystem

$$1-\lambda, \; 1-\lambda^2, \ldots, \; 1-\lambda^l$$

für die Darstellung aller Einseinheiten von $k_\zeta(\mathfrak{l})$ zugrunde. Ist dann

$$(3.) \qquad \left\{\begin{array}{ll} a = (1-\lambda)^{c_1} \ldots (1-\lambda^l)^{c_l}\, a_0^l & (\mathfrak{l}) \\ \beta = (1-\lambda)^{d_1} \ldots (1-\lambda^l)^{d_l}\, \beta_0^l & (\mathfrak{l}) \end{array}\right\}; \quad (c_a, d_a \text{ mod. } l)$$

die Darstellung irgendzweier Einseinheiten $a, \beta$ von $k_\zeta(\mathfrak{l})$ durch jenes System, und wird

$$(4.) \qquad \left(\frac{1-\lambda^a, \, 1-\lambda^b}{\mathfrak{l}}\right)^{-1} = \zeta^{p_{ab}}; \quad (a, b = 1, 2, \ldots l)$$

gesetzt, so ist speziell [1])

$$p_{al} \equiv p_{lb} \equiv 0 \text{ mod. } l; \qquad (a, b = 1, 2, \ldots l),$$

und das allgemeine Symbol $\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ drückt sich folgendermaßen durch die Werte der speziellen Symbole (4.) aus:

$$(5.) \qquad \left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{a,b=1}^{l-1} c_a d_b p_{ab}}.$$

[1]) Siehe *H. Hasse*, Zerlegungs- und Vertauschungssatz . . . ., ds. Journ. Bd. 154. S. 20. (5.)

Es genügt dann für unseren Zweck, die $p_{ab}$ auf Grund von (2.) zu bestimmen und durch Logarithmen darzustellen.

8. Wir haben dazu vor allem die logarithmischen Differentialquotienten von $1-\lambda^a$, $1-\lambda^b$ zu berechnen. Nun ist

$$1-\lambda^a = 1-(1-\zeta)^a = \varphi(\zeta), \text{ also } \varphi(e^v) = 1-(1-e^v)^a$$

und im Sinne der Gleichheit für den Bereich von $l$

$$\log\varphi(e^v) = \log(1-(1-e^v)^a) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}(1-e^v)^{a\nu}$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{\mu=0}^{a\nu}(-1)^\mu\binom{a\nu}{\mu}e^{v\mu} = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{\mu=0}^{a\nu}(-1)^\mu\binom{a\nu}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{v^r\mu^r}{r!}.$$

Da die hier auftretende logarithmische Reihe und die Exponentialreihe in einer Umgebung von $v=0$ absolut und gleichmäßig konvergieren, darf nach Potenzen von $v$ geordnet werden:

$$\log\varphi(e^v) = -\sum_{r=0}^{\infty}\frac{v^r}{r!}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{\mu=0}^{a\nu}(-1)^\mu\binom{a\nu}{\mu}\mu^r \qquad (1).$$

Hierin kann die Summation über $\nu$ bei jedem $\nu \geqq r$ abgebrochen werden; denn der Koeffizient

$$\sum_{\mu=0}^{a\nu}(-1)^\mu\binom{a\nu}{\mu}\mu^r$$

von $\frac{1}{r}$ in dieser Summe ist bekanntlich das Anfangsglied der $a\nu$-ten Differenzenreihe der arithmetischen Reihe $r$-ter Ordnung

$$0^r,\ 1^r,\ 2^r,\ \ldots,$$

also immer Null, wenn $a\nu > r$, d. h. $\nu > \frac{r}{a}$ ist. Im ungünstigsten Falle $a=1$, darf also hinter $\nu = r$ abgebrochen werden.

Der $r$-te logarithmische Differentialquotient von $1-\lambda^a$ ist dann nach Definition der Koeffizient von $\frac{v^r}{r!}$ in obiger Entwicklung von $\log\varphi(e^v)$, also unter Verwendung der eben gemachten Bemerkung bezüglich der Summation nach $\nu$

$$l_r(1-\lambda^a) \equiv -\sum_{\nu=1}^{l-1}\frac{1}{\nu}\sum_{\mu=0}^{a\nu}(-1)^\mu\binom{a\nu}{\mu}\mu^r \bmod l; \qquad (r=1,2,\ldots,l-1),$$

auch für $r = l-1$, weil ja $\frac{\varphi(1)-1}{l} = 0$ ist.

9. Hieraus ergibt sich nach (2.) für den zu bestimmenden Exponenten $p_{ab}$ der Ausdruck

$$p_{ab} \equiv \sum_{r=1}^{l-1}(-1)^r\sum_{\nu=1}^{l-1}\frac{1}{\nu}\sum_{\mu=0}^{a\nu}(-1)^\mu\binom{a\nu}{\mu}\mu^r\cdot\sum_{\nu'=1}^{l-1}\frac{1}{\nu'}\sum_{\mu'=1}^{b\nu'}(-1)^{\mu'}\binom{b\nu'}{\mu'}\mu'^{l-r} \bmod l.$$

Durch Vertauschung der Summationsfolge erhält man:

$$p_{ab} \equiv \sum_{\nu,\nu'=1}^{l-1}\frac{1}{\nu\nu'}\sum_{\mu=0}^{a\nu}\sum_{\mu'=0}^{b\nu'}(-1)^{\mu+\mu'}\binom{a\nu}{\mu}\binom{b\nu'}{\mu'}\sum_{r=1}^{l-1}(-1)^r\mu^r\mu'^{l-r} \bmod l.$$

Da die einzigen Nenner $\nu$, $\nu'$ prim zu $l$ sind, dürfen mod. $l$ die Glieder mit $\mu \equiv 0$ mod. $l$ oder $\mu' \equiv 0$ mod. $l$ weggelassen werden. Sind aber $\mu$, $\mu'$ prim zu $l$, so gilt bekanntlich

$$\sum_{r=1}^{l-1}(-1)^r \mu^r \mu'^{l-r} \equiv \sum_{r=1}^{l-1}(-\mu)^r \mu'^{l-r} \equiv \mu' \sum_{r=1}^{l-1}\left(-\frac{\mu}{\mu'}\right)^r$$

$$\equiv \begin{cases} 0 \bmod. l \text{ für } \mu + \mu' \not\equiv 0 \bmod. l, \\ -\mu' \bmod. l \text{ für } \mu + \mu' \equiv 0 \bmod. l. \end{cases}$$

Daher wird

$$p_{ab} \equiv \sum_{\nu,\nu'=1}^{l-1} \frac{1}{\nu\nu'} \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \sum_{n,n'} (-1)^{(\varkappa+ln)+((l-\varkappa)+ln')} \binom{a\nu}{\varkappa+ln}\binom{b\nu'}{(l-\varkappa)+ln'} \varkappa \bmod. l$$

$$\equiv -\sum_{\nu,\nu'=1}^{l-1} \frac{1}{\nu\nu'} \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \sum_{n,n'} (-1)^{n+n'} \binom{a\nu}{\varkappa+ln}\binom{b\nu'}{(l-\varkappa)+ln'} \bmod. l,$$

wo die $\sum_{n,n'}$ von $n, n' = 0$ an soweit zu erstrecken ist, bis die Binomialkoeffizienten Null werden. Die Doppelsumme $\sum_{n,n'}$ ist das Produkt

$$\sum_{n}(-1)^n \binom{a\nu}{\varkappa+ln} \cdot \sum_{n'}(-1)^{n'} \binom{b\nu'}{(l-\varkappa)+ln'}.$$

Die Faktoren dieses Produktes lassen sich nun durch *Spuren* aus $k_\zeta$ darstellen. Es ist nämlich:

$$\lambda^{a_\nu} = (1-\zeta)^{a_\nu} = \sum_{m=0}^{a_\nu}(-1)^m \binom{a\nu}{m} \zeta^m$$

$$\zeta^{-\varkappa}\lambda^{a_\nu} = \sum_{m=0}^{a_\nu}(-1)^m \binom{a\nu}{m} \zeta^{m-\varkappa}; \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq l-1)$$

$$S(\zeta^{-\varkappa}\lambda^{a_\nu}) = \sum_{i=0}^{l-1}\sum_{m=0}^{a_\nu}(-1)^m \binom{a\nu}{m} \zeta^{i(m-\varkappa)} \quad [1])$$

$$= \sum_{m=0}^{a_\nu}(-1)^m \binom{a\nu}{m} \sum_{i=0}^{l-1} \zeta^{i(m-\varkappa)}.$$

Die $\sum_i$ ist 0 oder $l$, je nachdem $m \not\equiv \varkappa$ oder $m \equiv \varkappa \bmod. l$ ist. Also wird

$$\frac{1}{l} S(\zeta^{-\varkappa}\lambda^{a_\nu}) = \sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv \varkappa \bmod. l}}^{a_\nu} (-1)^m \binom{a\nu}{m}$$

$$= \sum_{n}(-1)^{\varkappa+ln}\binom{a\nu}{\varkappa+ln} = (-1)^\varkappa \sum_{n}(-1)^n \binom{a\nu}{\varkappa+ln},$$

wo wieder $\sum_n$ von $n = 0$ an soweit zu erstrecken ist, bis die Binomialkoeffizienten Null werden. Damit wird unsere Doppelsumme

$$\sum_n \sum_{n'} = -\frac{1}{l^2} \cdot S(\zeta^{-\varkappa}\lambda^{a_\nu}) \cdot S(\zeta^{\varkappa}\lambda^{b_{\nu'}})$$

und damit

$$p_{ab} \equiv \sum_{\nu,\nu'=1}^{l-1} \frac{1}{\nu\nu'} \sum_{k=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\lambda^{a_\nu})}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa}\lambda^{b_{\nu'}})}{l} \bmod. l$$

$$\equiv \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S\left(\zeta^{-\varkappa}\sum_{\nu=1}^{l-1}\frac{\lambda^{a_\nu}}{\nu}\right)}{l} \cdot \frac{S\left(\zeta^{\varkappa}\sum_{\nu'=1}^{l-1}\frac{\lambda^{b_{\nu'}}}{\nu'}\right)}{l} \bmod. l.$$

Die $\sum_\nu$, $\sum_{\nu'}$ unter den Spurzeichen sind nun die Anfangsglieder der Entwicklungen

---

[1]) Die Spur erfordert nur Summation von $i = 1, \ldots, l-1$. Da aber $\zeta^{-i\varkappa}(1-\zeta^i)^{a_\nu}$ für $i = 0$ verschwindet, ist die Schreibweise des Textes ebenfalls richtig.

von $-\log(1-\lambda^a)$, $-\log(1-\lambda^b)$. Wir zeigen jetzt, daß wir, außer im Falle $a=1$ oder $b=1$, diese Logarithmen unbeschadet an die Stelle der $\sum_\nu$, $\sum_{\nu'}$ setzen dürfen. Hierzu ist nur nachzuweisen, daß

$$\sum_{\nu=1}^{l-1} \frac{\lambda^{a\nu}}{\nu} \equiv -\log(1-\lambda^a) \bmod. l, \text{ d. h. mod. } l^l;\ (a>1).$$

Denn dann sind die nach dem obigen zu bildenden Spuren für beide Seiten dieser Kongruenz als rationale Zahlen kongruent mod. $l^2$, was offenbar gerade hinreicht, um die genannte Ersetzung zu rechtfertigen. Nun ist

$$-\log(1-\lambda^a) - \sum_{\nu=1}^{l-1} \frac{\lambda^{a\nu}}{\nu} = \sum_{\nu=l}^{\infty} \frac{\lambda^{a\nu}}{\nu} \quad (1),$$

so daß es genügt zu zeigen, daß alle Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung mindestens die Ordnung $l$ in bezug auf $\mathfrak{l}$ haben.

10. Im Interesse einer Anwendung in der auf S. 96, Anm. 3 zitierten Arbeit beweisen wir gleich den folgenden, noch etwas schärferen Hilfssatz, der sich auch auf den eben noch ausgeschlossenen Fall $a=1$ bezieht:

*Hilfssatz* 1. *Ist* $a>1$, *so sind alle Glieder von* $\frac{\lambda^{al}}{l}$ *an in der Potenzreihe*

$$-\log(1-\lambda^a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^{a\nu}}{\nu} \quad (1)$$

*mindestens durch* $\mathfrak{l}^{l+1}$ *teilbar*; *für* $a=1$ *gilt dasselbe von* $\frac{\lambda^{l+1}}{l+1}$ *an.*

*Beweis*: Wir teilen die fraglichen Glieder in zwei Kategorien, je nachdem $(\nu, l)=1$ oder $>1$ ist. Für die erste Kategorie sind dann die zugehörigen Ordnungszahlen $g_\nu = a\nu$, für die zweite Kategorie setzen wir

$$\nu = l^c q;\ ((q,l)=1,\ q \geqq 1,\ c \geqq 1),$$

dann sind die zugehörigen Ordnungszahlen

$$g_\nu = aql^c - c(l-1).$$

Für die erste Kategorie folgt ohne weiteres

$$g_\nu = a\nu \geqq a(l+1) \geqq l+1, \text{ weil } a \geqq 1.$$

Für die zweite Kategorie ist

$$g_\nu = aql^c - c(l-1) \geqq aq(1+c(l-1)) - c(l-1) = aq + c(aq-1)(l-1).$$

Ist nun nicht gleichzeitig $a=1$, $q=1$, so ist wegen $c \geqq 1$ weiter

$$g_\nu \geqq 2 + (l-1) = l+1.$$

Ist aber $a=1$ und $q=1$, so ist für $c=1$, also für das Glied $\frac{\lambda^l}{l}$ die Ordnungszahl 1, für die weiteren Glieder der zweiten Kategrie mit $q=1$, $c \geqq 2$ aber ist wieder

$$g_\nu = l^c - c(l-1) \geqq 1 + c(l-1) + \binom{c}{2}(l-1)^2 - c(l-1) \geqq 1 + (l-1)^2 > l+1,$$

[w. z. b. w.

11. Somit ist im Falle $a, b > 1$:

$$(6.) \quad p_{ab} \equiv \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log(1-\lambda^a))}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa}\log(1-\lambda^b))}{l} \bmod. l.$$

Im Falle $a=1$, $b>1$ dagegen ist

$$p_{1b} \equiv \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S\left\{\zeta^{-\varkappa}\left[\log(1-\lambda)+\frac{\lambda^l}{l}\right]\right\}}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa}\log(1-\lambda^b))}{l} \bmod l$$

und im Falle $a > 1$, $b = 1$:

$$p_{a1} \equiv \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log(1-\lambda^a))}{l} \cdot \frac{S\left\{\zeta^{\varkappa}\left[\log(1-\lambda)+\frac{\lambda^l}{l}\right]\right\}}{l} \bmod l.$$

Im Falle $a = 1$, $b = 1$ ist $p_{11} \equiv 0 \bmod l$, weil

$$\zeta^{p_{11}} = \left(\frac{1-\lambda, 1-\lambda}{\mathfrak{l}}\right)^{-1} = \left(\frac{\zeta, \zeta}{\mathfrak{l}}\right)^{-1} = 1.$$

Dieser Fall subsumiert sich von selbst unter die für $p_{1b}$ und $p_{a1}$ erhaltenen Formeln; denn wegen $\log(1-\lambda) = \log\zeta = 0(\mathfrak{l})$ werden in den Ausdrücken $p_{1b}$ für $b = 1$ und $p_{a1}$ für $a = 1$ alle Summanden Null.

Man könnte aus letzterem Grunde allgemein in $p_{1b}$ und $p_{a1}$ die Terme $\log(1-\lambda)$ auslassen. Wir wollen sie jedoch mitführen, um die formale Identität mit dem allgemeinen $p_{ab}$ zu wahren. Dann haben wir

$$p_{1b} \equiv \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log(1-\lambda))}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa}\log(1-\lambda^b))}{l} + \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S\left(\zeta^{-\varkappa}\frac{\lambda^l}{l}\right)}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa}\log(1-\lambda^b))}{l} \bmod l,$$

$$p_{a1} \equiv \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log(1-\lambda^a))}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa}\log(1-\lambda))}{l} + \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log(1-\lambda^a))}{l} \cdot \frac{S\left(\zeta^{\varkappa}\frac{\lambda^l}{l}\right)}{l} \bmod l.$$

Nun ist

$$S\left(\zeta^{-\varkappa}\frac{\lambda^l}{l}\right) = \frac{1}{l}S(\zeta^{-\varkappa}\lambda^l) = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{l-1}\zeta^{-\varkappa i}(1-\zeta^i)^l$$

$$= \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{l-1}\zeta^{-\varkappa i}\sum_{m=0}^{l}(-1)^m\binom{l}{m}\zeta^{im} = \frac{1}{l}\sum_{m=0}^{l}(-1)^m\binom{l}{m}\sum_{i=0}^{l-1}\zeta^{i(m-\varkappa)}.$$

Die $\sum_i$ ist dann und nur dann von Null verschieden und gleich $l$, wenn $m \equiv \varkappa \bmod l$.

Wegen $1 \leqq \varkappa \leqq l-1$ ist also

$$S\left(\zeta^{-\varkappa}\frac{\lambda^l}{l}\right) = (-1)^{\varkappa}\binom{l}{\varkappa}$$

und analog

$$S\left(\zeta^{\varkappa}\frac{\lambda^l}{l}\right) = (-1)^{l-\varkappa}\binom{l}{l-\varkappa} = -(-1)^{\varkappa}\binom{l}{\varkappa}.$$

Daher werden die an $p_{1b}$ bezw. $p_{a1}$ gegenüber dem allgemeinen $p_{ab}$ (Formel (6.)) anzubringenden Zusatzglieder

$$\equiv \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{(-1)^{\varkappa}\binom{l}{\varkappa}}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa}\log(1-\lambda^b))}{l} \equiv \frac{1}{l^2}S\left\{\sum_{\varkappa=1}^{l-1}\left[(-1)^{\varkappa}\binom{l}{\varkappa}\varkappa\zeta^{\varkappa}\right]\log(1-\lambda^b)\right\} \bmod l$$

bezw.

$$\equiv -\sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log(1-\lambda^a))}{l} \cdot \frac{(-1)^\varkappa \binom{l}{\varkappa}}{l}$$

$$\equiv -\frac{1}{l^2} S\left\{\sum_{\varkappa=1}^{l-1}\left[(-1)^\varkappa \binom{l}{\varkappa} \varkappa (\zeta^{-1})^\varkappa\right] \log(1-\lambda^a)\right\} \bmod l.$$

Nun ist, wenn $\psi(x) = (1-x)^l$ gesetzt wird,

$$x\,\psi'(x) = \sum_{\varkappa=1}^{l-1} (-1)^\varkappa \binom{l}{\varkappa} \varkappa x^\varkappa - l x^l = -l x (1-x)^{l-1}$$

also

$$\zeta\,\psi'(\zeta) = \sum_{\varkappa=1}^{l-1} (-1)^\varkappa \binom{l}{\varkappa} \varkappa \zeta^\varkappa - l = -l\zeta\lambda^{l-1}$$

und

$$\zeta^{-1}\psi'(\zeta^{-1}) = \sum_{\varkappa=1}^{l-1} (-1)^\varkappa \binom{l}{\varkappa} \varkappa (\zeta^{-1})^\varkappa - l = -l\zeta^{-1}\lambda^{l-1}$$

Indem wir die hieraus sich ergebenden Werte für die $\sum_\varkappa$ in die Zusatzglieder von $p_{1b}$ und $p_{a1}$ einführen und bedenken, daß wegen $\log(1-\lambda^a) \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}^2$, $\log(1-\lambda^b) \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}^2$:

$$\frac{1}{l^2} S\{l\zeta\lambda^{l-1}\log(1-\lambda^a)\} = \frac{1}{l} S\{\zeta\lambda^{l-1}\log(1-\lambda^a)\} \equiv 0 \bmod l,$$

$$\frac{1}{l^2} S\{l\zeta^{-1}\lambda^{l-1}\log(1-\lambda^b)\} = \frac{1}{l} S\{\zeta^{-1}\lambda^{\lambda-1}\log(1-\lambda^b)\} \equiv 0 \bmod l$$

ist, werden jene Zusatzglieder

$$\equiv \frac{1}{l} S(\log(1-\lambda^b)) \text{ bezw. } -\frac{1}{l} S(\log(1-\lambda^a)) \bmod l,$$

und somit

$$(7.)\quad p_{1b} \equiv \sum_{k=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log(1-\lambda))}{l} \cdot \frac{S(\zeta^\varkappa \log(1-\lambda^b))}{l} + \frac{S(\log(1-\lambda^b))}{l} \bmod l,$$

$$(8.)\quad p_{a1} \equiv \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log(1-\lambda^a))}{l} \cdot \frac{S(\zeta^\varkappa \log(1-\lambda))}{l} - \frac{S(\log(1-\lambda^a))}{l} \bmod l.$$

12. Wir verwenden nunmehr die Ergebnisse (6.), (7.), (8.) zur Zusammensetzung des allgemeinen Ausdrucks $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ gemäß (3.), (4.), (5.) und finden:

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{a,b=1}^{l-1} c_a d_b p_{ab}}$$

$$= \zeta^{\sum_{a,b=1}^{l-1} c_a d_b \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log(1-\lambda^a))}{l} \cdot \frac{S(\zeta^\varkappa \log(1-\lambda b))}{l} + \sum_{b=1}^{l-1} c_1 d_b \frac{S(\log(1-\lambda^b))}{l} - \sum_{a=1}^{l-1} d_1 c_a \frac{S(\log(1-\lambda a))}{l}}.$$

Dies ist aber unter Verwendung der Funktionalgleichung des Logarithmus nach (3.)

$$= \zeta^{\sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log\alpha)}{l} \cdot \frac{S(\zeta^\varkappa \log\beta)}{l} + c_1 \frac{S(\log\beta)}{l} - d_1 \frac{S(\log\alpha)}{l}}.$$

Die Koeffizienten $c_1$, $d_1$ drücken sich noch wie folgt durch $\alpha$ und $\beta$ aus: Es ist nach (3.)

$$\alpha \equiv (1-\lambda)^{c_1} \equiv 1 - c_1\lambda \bmod \mathfrak{l}^2,$$

$$\beta \equiv (1-\lambda)^{d_1} \equiv 1 - d_1\lambda \bmod \mathfrak{l}^2,$$

also

$$S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right) \equiv (l-1)(-c_1) \equiv c_1 \bmod l,$$

$$S\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right) \equiv (l-1)(-d_1) \equiv d_1 \bmod l.$$

Hiernach erhält man folgendes Ergebnis:

*Für irgendzwei zu l prime, zueinander kernprime $\alpha$, $\beta$ aus $k_\zeta$ gilt das allgemeine Reziprozitätsgesetz* [1]*):*

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log \alpha^{l-1})}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa}\log \beta^{l-1})}{l} + S\left(\frac{\alpha^{l-1}-1}{\lambda}\right)\frac{S(\log \beta^{l-1})}{l} - S\left(\frac{\beta^{l-1}-1}{\lambda}\right)\frac{S(\log \alpha^{l-1}}{l}}$$

*speziell für $\alpha, \beta \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$ einfacher:*

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log \alpha)}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa}\log \beta)}{l} + S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)\frac{S(\log \beta)}{l} - S\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right)\frac{S(\log \alpha)}{l}}$$

Für die Terme $\frac{S(\log \alpha)}{l}$, $\frac{S(\log \beta)}{l}$ im Exponenten kann auch $\frac{N(\alpha)-1}{l}$, $\frac{N(\beta)-1}{l}$ geschrieben werden, sodaß die Endformel auch so lautet:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa}\log \alpha}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa}\log \beta)}{l} + S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)\frac{N(\beta)-1}{l} - S\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right)\frac{N(\alpha)-1}{l}} \quad \textit{für kernprime}$$

$$\alpha, \beta \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$$

und entsprechend im allgemeinen Falle: $\alpha$, $\beta$ prim zu $l$. Denn für $\alpha = \zeta$ wird wegen $\log \zeta = 0$ nach unserer Endformel

$$\left(\frac{\zeta}{\beta}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\zeta-1}{\lambda}\right)\frac{S(\log \beta)}{l}} = \zeta^{\frac{S(\log \beta)}{l}},$$

während nach Definition des *Legendre*schen Symbols

$$\left(\frac{\zeta}{\beta}\right) = \zeta^{\frac{N(\beta)-1}{l}}$$

ist. Die hiernach für beliebige $\beta \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$ gültige Beziehung

$$\frac{S(\log \beta)}{l} \equiv \frac{N(\beta)-1}{l} \bmod l$$

kann man auch direkt beweisen, indem man sie zunächst für $\beta = 1 - \lambda^b$; $(b = 1, 2, \ldots, l)$ beweist und dann vermöge der Funktionalgleichungen des log und der Norm nach (3.) zu beliebigen $\beta \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$ übergeht.

---

[1]) Die allgemeinere Formel ist aus der speziellen auf Grund der Bemerkung von S. 97 zu bilden. Die Ausdrücke $\log \alpha^{l-1}$, $\log \beta^{l-1}$ dürfen dabei nicht durch $(l-1)\log \alpha$, $(l-1)\log \beta$ ersetzt werden, weil $\log \alpha$ nur für $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$ erklärt ist. Ist $\alpha, \beta \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$, so liefert diese Ersetzung umgekehrt die spezielle Formel aus der allgemeinen.

13. Ich leite noch leicht die in meiner a. S. 96, Anm. 2 zitierten Arbeit erhaltene Formel für den Fall $\alpha \equiv 1 \bmod. l$, $\beta \equiv 1 \bmod. l$ auf Grund des hier gewonnenen Ergebnisses her. Sei

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1 + a\,l + \cdots \\ \beta &= 1 + b\,\lambda + \cdots \end{aligned}\right\} \text{(1)}.$$

Dann wird für den Bereich von $l$

$$\log \alpha = a l + \text{höhere Glieder},$$

$$\frac{S(\log \alpha)}{l} \equiv \frac{N(\alpha) - 1}{l} \equiv -a \bmod. l,$$

$$\frac{S(\zeta^{-\varkappa} \log \alpha)}{l} \equiv a\, S(\zeta^{-\varkappa}) \equiv -a \bmod. l,$$

$$S\left(\frac{\alpha - 1}{\lambda}\right) \equiv 0 \bmod. l,$$

$$S\left(\frac{\beta - 1}{\lambda}\right) \equiv -b \bmod. l,$$

also

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{-a \frac{S(\log \beta \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \zeta^{\varkappa})}{l} - ab}.$$

Nun ergibt sich

$$\sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \zeta^{\varkappa} = \zeta \left| \frac{d}{dx}(1 + x + \cdots + x^{l-1}) \right|_{x=\zeta} = \zeta \left[ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^l - 1}{x - 1}\right) \right|_{x=\zeta} = \zeta \frac{l\,\zeta^{l-1}}{\zeta - 1} = -\frac{l}{\lambda},$$

und

$$\frac{1}{l} S\left(\frac{l}{\lambda} \log \beta\right) = S\left(\frac{\log \beta}{\lambda}\right) \equiv 0 \bmod. l, \text{ weil } \log \beta \equiv 0 \bmod. l^2.$$

Somit wird

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{-ab} = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{l} \cdot \frac{\beta-1}{\lambda}\right)},$$

wie in meiner früheren Arbeit

14. Um das für den Kreiskörper $k_\zeta$ gewonnene Ergebnis auf beliebige Oberkörper $K$ von $k_\zeta$ auszudehnen, benutze ich folgenden

*Hilfssatz 2. Sei k Oberkörper von $k_\zeta$, K Oberkörper von k und n das Zeichen für die Relativnorm von K nach k. Ferner sei*

a) $\mathfrak{P}$ *ein zu l primer Primteiler aus K und a eine zu* $\mathfrak{P}$ *prime Zahl aus k. Dann gilt*

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{P}}\right)_K = \left(\frac{a}{n(\mathfrak{P})}\right)_k;$$

b) $\mathfrak{p}$ *ein zu l primer Primteiler aus k und A eine zu* $\mathfrak{p}$ *prime Zahl aus K. Dann gilt*

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)_K = \left(\frac{n(A)}{\mathfrak{p}}\right)_k.$$

*Dabei bezeichnet der Index an den Potenzrestsymbolen den Körper, auf den sie sich beziehen. Dasselbe gilt wegen der Produkteigenschaften des*

*Potenzrestsymbols auch, wenn bei* a) *für* $\mathfrak{P}$ *ein beliebiges, zu* $\alpha$ *kernprimes* [1]), *zu* $l$ *primes Ideal* $\mathfrak{A}$ *aus* $K$ *und bei* b) *für* $\mathfrak{p}$ *ein beliebiges, zu* $A$ *kernprimes, zu* $l$ *primes Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* $K$ *gesetzt wird.*

Teil a) wurde zuerst von *Furtwängler* [2]), Teil b) in einem Spezialfall ebenfalls von *Furtwängler*, allgemein von *Takagi* [3]) bewiesen. a) ist auf Grund der Definition des Potenzrestsymbols fast trivial. Ist nämlich $\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{P}$ zugeordnete Primteiler von $k$, $N$ die Norm in $k$ und $n(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^f$, so ist

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{P}}\right)_K \equiv \alpha^{\frac{(N(\mathfrak{p}))^f - 1}{l}} \text{ mod. } \mathfrak{P}, \text{ also mod. } \mathfrak{p},$$

$$\left(\frac{\alpha}{n(\mathfrak{P})}\right)_k = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_k^f \equiv \alpha^{f\frac{N(\mathfrak{p})-1}{l}} \text{ mod. } \mathfrak{p},$$

und a) ist eine unmittelbare Folge der Kongruenz

$$\frac{P^f - 1}{l} \equiv f\frac{P-1}{l} \text{ mod. } l \text{ für } P \equiv 1 \text{ mod. } l.$$

Der *Takagi*sche Beweis für b) a. a. O. erscheint sehr kompliziert. Wir geben hier folgenden, wesentlich vereinfachten Beweis für b):

Es sei $p$ die $\mathfrak{p}$ zugeordnete rationale Primzahl, $f$ der Grad von $\mathfrak{p}$ und zur Abkürzung

$$N(\mathfrak{p}) = p^f = P.$$

Ferner sei

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{P}_z^{e_z}; \ (\mathfrak{P}_i \text{ vom Relativgrade } f_i)$$

die Zerlegung von $\mathfrak{p}$ in $K$ in Primteilerpotenzen. Schließlich sei $\Omega_i$; $(i = 1, 2, \ldots, z)$ je eine primitive $(P^{f_i} - 1)$-te Einheitswurzel der *Hensel*schen Erweiterungskörper $K(\mathfrak{P}_i)$. Diese $\Omega_i$ wollen wir auf folgende Weise normiert annehmen. Weil $K$ und $k$ Oberkörper von $k_\zeta$ sind, ist

$$P \equiv 1 \text{ mod. } l; \ P^{f_i} \equiv 1 \text{ mod. } l,$$

also

$$\Omega_i^{\frac{P^{f_i}-1}{l}} = \zeta_i(\mathfrak{P}_i)$$

einer primitiven $l$-ten Einheitswurzel für den Bereich von $\mathfrak{P}$ gleich. Ist dann $\zeta_i^{c_i}$ diejenige, eindeutig bestimmte, primitive $l$-te Einheitswurzel von $K(\mathfrak{P}_i)$, der die Einheitswurzel $\zeta$, welche zur Definition der Potenzrestsymbole benutzt wird, für den Bereich von $\mathfrak{P}_i$ gleich ist:

$$\zeta = \zeta_i^{c_i}(\mathfrak{P}_i),$$

so kann der zu $l$ prime Exponent $c_i$ in seiner Restklasse mod. $l$ auch prim zu $P^{f_i} - 1$ gewählt werden. Dann ist auch $\Omega^{c_i'}$, wo $c_i c_i' \equiv 1$ mod. $P^{f_i} - 1$, eine

[1]) „$\mathfrak{A}$ kernprim zu $\alpha$" bedeutet: Der Kern von $\mathfrak{A}$ (in bezug auf den Exponenten $l$ gebildet) ist prim zu $\alpha$. Die Beziehung ist also nicht gegenseitig, wie die obige: „$\alpha, \beta$ kernprim zueinander" (S. 96).

[2]) Math. Ann 58, S. 23 ff.

[3]) Journ. Coll. Science. Tokyo, Vol. XLIV. Art. 5, § 2.

primitive $(P^{f_i}-1)$-te Einheitswurzel aus $K(\mathfrak{P}_i)$. Wird diese von vornherein an Stelle von $\Omega_i$ gewählt und wieder mit $\Omega_i$ bezeichnet, so ist also

$$\Omega_i^{\frac{P^{f_i}-1}{l}} = \zeta\,(\mathfrak{P}_i).$$

Ist nun

$$A = \Omega_i^{b_i} H_i\ (\mathfrak{P}_i);\ (H_i \text{ Einseinheit von } K(\mathfrak{P}_i))$$

die Darstellung der in b) gegebenen, zu $\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{P}_i$, primen Zahl $A$ für den Bereich von $\mathfrak{P}_i$, so ist

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{P}_i}\right)_K \equiv A^{\frac{P^{f_i}-1}{l}} \equiv \Omega_i^{\frac{P^{f_i}-1}{l}} = \zeta^{b_i} \text{ mod. } \mathfrak{P}_i,$$

also

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{P}_i}\right)_K = \zeta^{b_i},$$

und daher

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)_K = \prod_{i=1}^{z}\left(\frac{A}{\mathfrak{P}_i}\right)_K^{e_i} = \zeta^{\sum_{i=1}^{z} b_i e_i}.$$

Andererseits ist, wenn $n_i$ die Norm von $K(\mathfrak{P}_i)$ nach $k(\mathfrak{p})$ bezeichnet:

$$n_i(A) = (n_i(\Omega_i))^{b_i}\, n_i(H_i)\ \ (\mathfrak{p}).$$

$n_i(H_i) = \eta_i$ ist eine Einseinheit von $k(\mathfrak{p})$, $n_i(\Omega_i)$ ist die $e_i$-te Potenz der Zahl

$$\Omega_i^{1+P+\cdots+P^{f_i-1}} = \Omega_i^{\frac{P^{f_i}-1}{P-1}} = \omega_i,$$

da $\Omega_i$ mit seinen relativ $k(\mathfrak{p})$ konjugierten $\Omega_i, \Omega_i^P, \ldots, \Omega_i^{P^{f_i-1}}$ einen Unterkörper $f_i$-ten Grades des Körpers $K(\mathfrak{P}_i)$ vom Grade $e_i f_i$ über $k(\mathfrak{p})$ definiert, und $\omega_i$ ist eine primitive $(P-1)$-te Einheitswurzel von $k(\mathfrak{p})$ mit der Eigenschaft

$$\omega_i^{\frac{P-1}{l}} = \zeta\,(\mathfrak{p}).$$

Aus $n_i(\Omega_i) = \omega_i^{e_i}$ folgt dann

$$n_i(A) = \omega_i^{b_i e_i}\, \eta_i\,(\mathfrak{p}),$$

und also für die Gesamtnorm:

$$n(A) = \prod_{i=1}^{z} n_i(A_i) = \prod_{i=1}^{z} \omega_i^{b_i e_i} \prod_{i=1}^{z} \eta_i = \prod_{i=1}^{z} \omega_i^{b_i e_i} \cdot \eta\ \ (\mathfrak{p}),$$

wo auch $\eta$ eine Einseinheit von $k(\mathfrak{p})$ ist. Es ist dann

$$n(A) \equiv \prod_{i=1}^{z} \omega_i^{b_i e_i} \text{ mod. } \mathfrak{p}$$

und daher

$$\left(\frac{n(A)}{\mathfrak{p}}\right)_k \equiv \left(\prod_{i=1}^{z} \omega_i^{b_i e_i}\right)^{\frac{P-1}{l}} \equiv \prod_{i=1}^{z} \omega_i^{\frac{P-1}{l} b_i e_i} = \zeta^{\sum_{i=1}^{z} b_i e_i} \text{ mod. } \mathfrak{p},$$

also

$$\left(\frac{n(A)}{\mathfrak{p}}\right)_k = \zeta^{\sum_{i=1}^{z} b_i e_i} = \left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)_k, \text{ w. z. b. w.}$$

15. Es bezeichne jetzt

$N, S$ Norm und Spur in $k = k_\zeta$,
$\overline{N}, \overline{S}$ „ „ „ „ $K$,
$n, s$ Relativ „ „ „ von $K$ nach $k_\zeta$,

und es sei wie oben $\mathfrak{l} = (\lambda) = (1 - \zeta)$ der Primteiler von $l$ in $k_\zeta$. Ist dann $\alpha \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}$ eine Zahl aus $k_\zeta$, $B \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}$ eine Zahl aus $K$, und $\alpha, B$ kernprim zueinander, so ist auch $n(B) \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}$ und sind auch $\alpha$ und $n(B)$ kernprim zueinander. Nach Hilfssatz 2 ist dann

$$\left(\frac{\alpha}{B}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{n(B)}\right)_{k_\zeta}; \qquad \left(\frac{B}{\alpha}\right)_K = \left(\frac{n(B)}{\alpha}\right)_{k_\zeta},$$

also

$$\left(\frac{\alpha}{B}\right)_K \left(\frac{B}{\alpha}\right)_K^{-1} = \zeta^{\sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \frac{S(\zeta^{-\varkappa} \log \alpha)}{l} \cdot \frac{S(\zeta^{\varkappa} \log n(B))}{l} + S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right) \frac{N(n(B))-1}{l} - S\left(\frac{n(B)-1}{\lambda}\right) \frac{N(\alpha)-1}{l}}.$$

Da nun (in dem $K$ zugeordneten, relativ zu $k_\zeta$ *Galois*schen Körper)

$$\log n(B) = \log B\, B' \cdots = \log B + \log B' + \cdots = s(\log B) \quad (1)$$

ist [1]), folgt

$$S(\zeta^{\varkappa} \log n(B)) = S(\zeta^{\varkappa} s(\log B)) = Ss(\zeta^{\varkappa} \log B) = \overline{S}(\zeta^{\varkappa} \log B) \quad (l).$$

Ferner ist, wenn

$$B = 1 + \Gamma\, \lambda$$

mit für $l$ ganzem $\Gamma$ gesetzt wird,

$$n(B) = 1 + s(\Gamma)\lambda + \text{höhere Glieder},$$

also

$$\frac{n(B) - 1}{\lambda} \equiv s(\Gamma) \mod \lambda,$$

$$S\left(\frac{n(B) - 1}{\lambda}\right) \equiv Ss(\Gamma) \equiv \overline{S}(\Gamma) \equiv \overline{S}\left(\frac{B - 1}{\lambda}\right) \mod l.$$

Somit resultiert folgendes Teilresultat zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz [1]) in $K$:

*Ist $K$ ein beliebiger Oberkörper von $k_\zeta$ und $\alpha, B$ zwei zueinander kernprime Zahlen aus $k_\zeta$ bezw. $K$ mit der Eigenschaft $\alpha, B \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}$, so ist*

$$\left(\frac{\alpha}{B}\right)_K \left(\frac{B}{\alpha}\right)_K^{-1} = \zeta^{\sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \cdot \frac{S(\zeta^{-\varkappa} \log \alpha)}{l} \cdot \frac{\overline{S}(\zeta^{\varkappa} \log B)}{l} + S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right) \frac{\overline{N}(B)-1}{l} - \overline{S}\left(\frac{B-1}{\lambda}\right) \frac{N(\alpha)-1}{l}}$$

---

[1]) auch $B', \ldots$ sind $\equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}$, also die Logarithmen definiert und die Funktionalgleichung anwendbar.

[2]) Natürlich läßt sich wieder eine entsprechende Verallgemeinerung wie oben (S. 105), hier auf den Fall $\alpha, B \equiv$ zu $l$ primer, rationaler Zahl mod. $\mathfrak{l}$ angeben.

# The Number $e$ in $k(p)$.

By *G. E. Wahlin*, Columbia Univ. U. S. A.

In his work on the exponential representation of the $p$-adic numbers Professor *Hensel* obtains by means of functional equations a $p$-adic series $f(\gamma) = 1 + \gamma + \gamma^2/2! + \cdots$ having the property of the exponential function, namely $f(\gamma_1) \cdot f(\gamma_2) = f(\gamma_1 + \gamma_2)$. In the field of the rational $p$-adic numbers this series converges, provided the order of the number $\gamma$ is greater than zero, and has then been denoted by the symbol $e^\gamma$. The $e$ thus introduced is a symbol which in $k(p)$ has no meaning unless effected by a properly chosen exponent $\gamma$ and, when such is the case, $e^\gamma$ is a principal unit of $k(p)$. In this we have assumed, that $p > 2$ is a rational prime, and this assumption will be retained through the following discussion.

We observe however that the equation

$$x^p = 1 + p + p^2/2! + p^3/3! + \cdots \quad (p), \tag{1.}$$

which is irreducible in $k(p)$, defines an algebraic number $a$ such that $a^p = 1 + p + p^2/2! + \cdots$ $(p)$ and we may therefore consider the $e$ as an algebraic number of degree $p$ relative to $k(p)$.

If we consider the equation

$$x^p = 1 + p^\varkappa \cdot A \qquad (p)$$

where $A$ is an integer of $k\,(p)$ we know that there exists in $k\,(p)$ a solution of this equation, when and only when $\varkappa > 1$ [1]) and this solution is then of the form $1 + p^{\varkappa-1}\overline{A}$ where $\overline{A}$ is an integer of $k\,(p)$.

If we then write

$$1 + p + p^2/2! + \cdots = (1 + p)\,(1 + p^2/2! + c_3 p^3 + \cdots) \qquad (p)$$

we know that the second factor is the $p$-th power of a principal unit of $k\,(p)$ and as such it may be written $E^p$. The equation (1.) may now be written in the form

$$x^p = (1 + p)\,E^p \qquad (p). \tag{2.}$$

If we then denote by $\beta$ a root of the irreducible equation

$$x^p = 1 + p$$

the field $k(p, \beta)$ contains the number e as defined above.

The purpose of this paper is to show that the number $e$, thus defined as a number in $k\,(p, \beta)$, is equal to

$$\lim_{\varrho \to 0} (1 + \varrho)^{1/\varrho} \tag{3.}$$

[1]) Author: Journ. f. Math. Bd. 145.

We can write $\varrho = p^{\varkappa}\,\varepsilon_{\varkappa}$ where $\varepsilon_{\varkappa}$ is a unit of $k(p)$ and may then write the limit (3.) in the form

$$\lim_{\varkappa\to\infty}(1+p^{\varkappa}\,\varepsilon_{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa}}}. \tag{4.}$$

This is analogous to the limit which defines $e$ in the domain of real numbers, but before we pass on to the study of the function we must assign a meaning to the operation with the given exponent which is a fractional $p$-adic number. After having defined the meaning of $(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\frac{1}{\varepsilon_{\varkappa}}}$ we shall define $(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa}}}$ as the $p^{\varkappa}$th root of the number so defined.

Let $\varepsilon_{\varkappa} = b_0 + b_1\,p + b_2\,p^2 + \cdots$ and $\varepsilon'_{\varkappa} = 1/\varepsilon_{\varkappa} = b'_0 + b'_1\,p + b'_2p^2 + \cdots$. In his work on the multiplicative representation of the $p$-adic numbers Professor *Hensel* defines the meaning of a principal unit with a $p$-adic exponent. According to his method it is easily seen that the infinite product

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{b'_i p^i} \tag{5.}$$

converges in $k(p)$. In fact since for all $i > \lambda$ the terms of the product are all congruent to 1. mod. $p^{\varkappa+\lambda+1}$ the first $\lambda+1$ terms of the product are the only ones which effect the first $\lambda+\varkappa+1$ terms of the expansion. Let us denote by $P_{\sigma}$ the product $\prod_{i=0}^{\sigma}(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{b'_i p^i}$ and by $P_{\sigma}^{(\sigma)}$ the $\sigma$-th convergent of $P_{\sigma}$. Then for $\sigma = 1, 2, \ldots$ $P_{\sigma}^{(\sigma)}$ represents the successive convergents of a $p$-adic number and if we denote this by $P$ and its $\sigma$-th convergent by $P^{(\sigma)}$ we see that provided $\sigma$ is chosen sufficiently large

$$P^{(\sigma)} \equiv \prod_{i=0}^{\sigma}(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{b'_i p^i} \bmod p^N$$

where $N$ is an arbitrarily large positive integer and hence

$$P = \prod_{i=0}^{\infty}(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{b'_i p^i}$$

We shall now say that $(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'_{\varkappa}} = \prod_{i=0}^{\infty}(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{b'_i p^i}$. If $\varepsilon_{\varkappa} = \bar{\varepsilon}_{\varkappa}$ we see that $(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{b'_i p^i} = (1+p^{\varkappa}\bar{\varepsilon}_{\varkappa})^{b'_i p^i}$ and hence $(1+p^{\varkappa}\bar{\varepsilon}_{\varkappa})^{\varepsilon'_{\varkappa}} = (1+p^{\varkappa}\bar{\varepsilon}_{\varkappa})^{\varepsilon'_{\varkappa}}$ $(p)$. If $\varepsilon'_{\varkappa} = \bar{\varepsilon}'_{\varkappa}$ $(p)$ we know that given an integer $N$ large at pleasure there exists a $\mu$, such that for all $\nu \geqq \mu$ the $\nu$-th convergents of $\bar{\varepsilon}'_{\varkappa}$ and $\varepsilon'_{\varkappa}$ are congruent mod $p^{N+1}$ and hence if $\bar{\varepsilon}_{\varkappa} = \bar{b}'_0 + \bar{b}'_1 p + \cdots$

$$\prod_{i=0}^{\nu}(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{b'_i p^i} \equiv \prod_{i=0}^{\nu}(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\bar{b}'_i p^i} \bmod p^{\varkappa+N+1}$$

and hence the $\nu$-th convergents of the two $p$-adic numbers $(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'_{\varkappa}}$ and $(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\bar{\varepsilon}'_{\varkappa}}$ are congruent mod. $p^{\varkappa+N+1}$ and hence the two numbers are equal. That is to say if $\varepsilon_{\varkappa} = \bar{\varepsilon}_{\varkappa}$ and $\varepsilon'_{\varkappa} = \bar{\varepsilon}'_{\varkappa}$ then $(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'_{\varkappa}} = (1+p^{\varkappa}\bar{\varepsilon}_{\varkappa})^{\bar{\varepsilon}'_{\varkappa}}$ $(p)$.

From now on we shall therefore assume that $\varepsilon_{\varkappa}$ and $\varepsilon'_{\varkappa}$ are given in the reduced $p$-adic form and shall denote their $\lambda$-th convergents by $\overset{(\lambda)}{\varepsilon}_{\varkappa}$ and $\overset{(\lambda)}{\varepsilon}'_{\varkappa}$ respectively.

So far we have made no use of the fact that $\varepsilon_{\varkappa}$ and $\varepsilon'_{\varkappa}$ are reciprocals. If we take this into account we have $\overset{(\lambda)}{\varepsilon}_{\varkappa} \cdot \overset{(\lambda)}{\varepsilon}'_{\varkappa} \equiv 1$ mod. $p^{\lambda+1}$ and from this we may then conclude the following relations

$$[(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'^{(\lambda)}_{\varkappa}}]^{\varepsilon^{(\lambda)}_{\varkappa}} = (1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'^{(\lambda)}_{\varkappa}\varepsilon^{(\lambda)}_{\varkappa}} \equiv 1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa} \bmod p^{\varkappa+\lambda+1}$$

and hence as $\lambda$ is allowed to increase we have

$$[(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'_{\varkappa}}]^{\varepsilon_{\varkappa}} = 1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa} \quad (p).$$

If we say that by $(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\frac{1}{\varepsilon_{\varkappa}}}$ we shall understand a number whose $\varepsilon_{\varkappa}$-th power is $1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa}$ the foregoing discussion shows that such a number exists and that it is equal to $(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'_{\varkappa}}$.

Let us next consider the $\varkappa$-th convergent of $\varepsilon'_{\varkappa}$. This being a positive rational integer we can apply the binomial theorem and have

$$(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'^{(\varkappa)}_{\varkappa}} = 1+\varepsilon_{\varkappa}\varepsilon'^{(\varkappa)}_{\varkappa}p^{\varkappa}+Ap^{2\varkappa}.$$

Since $\varepsilon_{\varkappa}\varepsilon'^{(\varkappa)}_{\varkappa} \equiv 1 \bmod p^{\varkappa+1}$ and hence $\varepsilon_{\varkappa}\varepsilon'^{(\varkappa)}_{\varkappa}p^{\varkappa} \equiv p^{\varkappa} \bmod p^{2\varkappa+1}$, and since $(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'_{\varkappa}} \equiv (1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'^{(\varkappa)}_{\varkappa}} \bmod p^{2\varkappa+1}$ we can write

$$\begin{aligned}(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\varepsilon'_{\varkappa}} &= 1+p^{\varkappa}+Bp^{2\varkappa}\\ &= (1+p^{\varkappa})(1+c_0p^{2\varkappa}+c_1p^{2\varkappa+1}+\cdots)\\ &= (1+p^{\varkappa})(1+bp^{2\varkappa}) \qquad (p)\end{aligned}$$

Hence we have

$$(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\frac{\varepsilon'_{\varkappa}}{p^{\varkappa}}} = (1+p^{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa}}}(1+bp^{2\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa}}} \quad (p).$$

The factor $1+bp^{2\varkappa}$ is a $p^{\varkappa}$th power of a principal unit of $k(p)$ which has the form $1+\bar{e}_0p^{\varkappa}+\bar{e}_1p^{\varkappa+1}+\cdots$ and as $\varkappa$ becomes $\infty$ this converges to 1. We therefore have

$$\lim_{\varkappa\to\infty}(1+p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa}}} = \lim_{\varkappa\to\infty}(1+p^{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa}}}$$

and conclude that if the limit exists it is independent of $\varepsilon_{\varkappa}$.

From now on we can therefore center our attention on the expression $(1+p^{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa}}}$. The number $1+p^{\varkappa}$ is in $k(p)$ a $p^{\varkappa-1}$th power and the root can be computed by the binomial theorem.

$$\begin{aligned}(1+p^{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa-1}}} &= 1+p+\frac{(1-p^{\varkappa-1})}{2!}p^2+\frac{(1-p^{\varkappa-1})(1-2p^{\varkappa-1})}{3!}p^3+\cdots\\ &\equiv 1+p+\frac{p^2}{2!}+\cdots\frac{p^{\varkappa}}{\varkappa!} \quad \bmod p^{\varkappa+1}\end{aligned}$$

and hence

$$\lim_{\varkappa\to\infty}(1+p^{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa-1}}} = 1+p+\frac{p^2}{2!}+\cdots \quad (p).$$

But the limit which we are evaluating is $\lim_{\varkappa\to\infty}(1+p^{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa}}}$ or in a slightly different form $\lim_{\varkappa\to\infty}\sqrt[p]{(1+p^{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa-1}}}}$.

Let us denote $(1+p^{\varkappa})^{\frac{1}{p^{\varkappa-1}}}$ by $E_{\varkappa}$ and $1+p+p^2/2!+\cdots$ by $E$. We shall confine our attention te the field $k(p,\beta)$ defined in the early part of the paper. The number $e$ as there defined is a number of $k(p,\beta)$ and is a root of the equation

(7.) $$x^p - E = 0 \quad (p).$$

Moreover $E \equiv E_\varkappa \bmod p^{\varkappa+1}$ and the equation

(8.) $$x^p - E_\varkappa = 0 \quad (p)$$

also has a solution in $k(p, \beta)$. Let $a_\varkappa$ be a solution of (8.). Then for any given $\varkappa$

$$a_\varkappa^p - E \equiv 0 \mod p^{\varkappa+1}$$

and hence

$$x^p - E \equiv (x - a_\varkappa) \cdot Q(x) \text{ mod. } p^{\varkappa+1}$$

Let $s$ be the order of the discriminant of (7.) in $k(p, \beta)$ and chose $\varkappa > s/p$. Let $\mathfrak{p} \backsim p^{1/p}$ be the prime divisor of $p$ in $k(p, \beta)$. The general theorem on page 68 of *Hensels* „Theorie der algebraischen Zahlen" shows that $x^p - E$ has a linear factor $x - a$ in $k(p, \beta)$ and $x - a \equiv x - a_\varkappa \bmod \mathfrak{p}^{p\varkappa+1-s}$ and hence $a \equiv a_\varkappa \bmod \mathfrak{p}^{p\varkappa+1-s}$.

We may therefore conclude that

(9.) $$\lim_{\varkappa\to\infty} a_\varkappa = a.$$

But $a_\varkappa = (1 + p^\varkappa)^{\frac{1}{p^\varkappa}}$ and $a = \sqrt[p]{\lim_{\varkappa\to\infty} (1 + p^\varkappa)^{p^{\varkappa-1}}}^{\frac{1}{p^{\varkappa-1}}}$ and equation (9.) therefore says

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \sqrt[p]{(1+p^\varkappa)^{p^{\varkappa-1}}}^{\frac{1}{p^{\varkappa-1}}} = \sqrt[p]{\lim_{\varkappa\to\infty} (1+p^\varkappa)^{p^{\varkappa-1}}}^{\frac{1}{p^{\varkappa-1}}}.$$

Now $\alpha$ is a number which in the first part of the paper was denoted by $e$ since $\alpha^p = e^p$ $(p)$ and from the equation (9.) we may therefore conclude that

$$\lim_{\varkappa\to\infty} (1+p^\varkappa)^{\frac{1}{p^\varkappa}} = e \quad (p)$$

or in general

$$\lim_{\varrho\to 0} (1+\varrho)^{\frac{1}{\varrho}} = e \quad (p).$$

---

# Elementare Betrachtungen über den Aufbau von Zahlverknüpfungen nach Gesetzen.

Von *Gerhard Stammler* in Wernigerode.

## Inhalt.


| | Seite |
|---|---|
| Einleitung | 114 |
| § 1. Das Problem | 115 |
| § 2. Grundlagen der Analogie | 116 |
| § 3. Aufstellung der Grundgleichungen | 116 |
| § 4. Fortsetzung | 117 |
| § 5. Gang der Untersuchung und Voruntersuchung | 118 |
| § 6. Voruntersuchung: Diskussion der Multiplikation | 119 |
| § 7. Fortsetzung: Allgemeine Multiplikation | 120 |
| § 8. Ergebnis der Voruntersuchung | 122 |
| § 9. Hauptuntersuchung: Werttripel | 123 |
| § 10. Fortsetzung: Reduktionsregeln | 123 |
| § 11. Fortsetzung: Diskussion der Restfälle | 126 |
| § 12. Schlußresultat | 129 |


## Einleitung.

Der am meisten begangene Weg, in der Kette der Zahlverknüpfungen von der Addition zur Multiplikation und weiter zur Potenzierung zu schreiten, dürfte der — seit *E. Schröder* [1]) so genannte — Weg der Iteration sein. Man gelangt hierbei zu dem Ergebnis, daß sich zwar für Addition und Multiplikation gewisse allgemeine Gesetze gleichmäßig aufstellen lassen (beide sind eindeutig, kommutativ, assoziativ und durch das distributive Gesetz verbunden), daß manche dieser Gesetze für die Potenz indessen keine Gültigkeit mehr haben.

Legt man nun, wie es in der neueren Mathematik vielfach geschieht, großen Wert beim Aufbau der Wissenschaft auf Übereinstimmung zusammengehöriger Teile in Hinsicht der für sie geltenden Gesetze (*Graßmann*, *Hankel*, *Schröder*,

[1]) *E. Schröder*, Lehrbuch der Arithmetik, Kap. II, § 29, Die Iteration, S. 109 ff.

*Pringsheim*, *Schubert*, Die *Axiomatik*) [1]), so scheint die Frage unausbleiblich, ob es nicht außer Addition und Multiplikation noch andere Zahlverknüpfungen geben kann, die denselben Gesetzen wie jene beiden gehorchen. Im folgenden werden einige elementare Untersuchungen vorgelegt werden, die wenigstens einen Teil dieser Frage restlos erledigen.

## § 1. Das Problem.

Wir beschränken uns im nachstehenden auf den Begriff einer Zahlverknüpfung als einer Vereinigung zweier Zahlen zu einer dritten Zahl derselben Gattung. Als Beispiele führen wir an: $a+b=c$, $a \cdot b = c$, $a : b = c$ usw. Hierin können $a$, $b$, $c$ als Elemente des Bereiches der natürlichen, rationalen, reellen, komplexen Zahlen betrachtet werden, aber immer sollen alle drei demselben, der Betrachtung ein für allemal zugrunde liegenden Bereiche angehören. Als Zahlverknüpfung in diesem Sinne gilt also nicht, wenn bei Zugrundelegung des Bereichs der ganzen Zahlen zwei solche $a$, $b$ zu einer dritten, rationalen, aber nicht ganzen Zahl $c = \frac{a}{b}$ verknüpft werden, ebenso nicht, wenn bei Betrachtung des Bereichs aller positiven Zahlen zwei solche $a, b$ zu einer dritten, nicht-positiven Zahl $c = a - b$, oder bei Betrachtung des Bereichs aller reellen Zahlen zwei solche $a$, $b$ zu einer dritten, nicht-reellen $c = (a, b) = a + bi$ verbunden werden.

Wir legen unserer Untersuchung den einfachen Bereich der natürlichen (positiven ganzen) Zahlen einschl. der Null zugrunde.

Ferner setzen wir als bekannt die Addition und Multiplikation mit diesen Zahlen voraus (s. § 2); auch die unter ihnen obwaltenden Größenbeziehungen, sowie die Regeln: Aus $a > b$ folgt $a+c > b+c$ und, wenn $c \neq 0$ ist, $ac > bc$.

Wir stellen nun die Frage: *Läßt sich eine Kette von Zahlverknüpfungen konstruieren, deren Anfangsglieder Addition und Multiplikation sind, und deren Eigenschaften durch eine Gruppe von Gesetzen (Grundgleichungen) bestimmt werden, die denen der Addition und Multiplikation analog sind?*

---

[1]) Vergl u. a. *H. Graßmann* d. Ä., Ausdehnungslehre (1848), (Werke I, 1) [Einleitung, Nr. 8 (Zerspaltung der Formenlehre, Werke S. 28), sowie überhaupt die Allgemeine Formenlehre (Werke S. 33ff., namentlich die Herausarbeitung des Distributivgesetzes, § 9, S. 41f.)]. — *H. Hankel*, Theorie der komplexen Zahlensysteme (1876) [§ 3, S. 11f. Prinzip der Permanenz formaler Gesetze, sowie Abschn. II, § 4f., Allgemeine Formenlehre], (N. B. Wir hatten unsere Bezeichnungen schon an Hand von *Graßmanns* Anregungen entwickelt, ehe wir die *Hankel*schen kennen lernten). Man vergl. auch das Vorwort zu *H. Hankel*, Die Elemente der projektivischen Geometrie (1875), S. III. — *E. Schröder*, Lehrbuch der Arithmetik [Die independente Entwicklung der Operationen]; Algorithmen und Calcüln (Arch. f. Math. u. Phys., (2), 5, S. 225ff.). (Auch die hier verwendete Bezeichnung der Operationen lernten wir erst nach Festlegung unserer Bezeichnungen kennen.) — *A. Pringsheim*, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, Bd. I, 1 (1916) [namentlich Vorwort S. VII; S. 1, S. 3 usf. bei jeder „Erweiterung des Zahlbegriffs"]. Ferner *A. Pringsheim*, Zahl- und Grenzbegriff. (J. B. d. D. M. V. Bd. 6, 1897, S. 78). — *Schubert*, Grundlagen der Arithmetik (Enzykl. d. math. Wiss. I A 1, 1898). — *D. Hilbert*, Axiomatisches Denken (Math. Ann. 78, 1918, S. 408ff.); Neubegründung der Mathematik (Abh. d. Math. Sem. Hamburg, 1922, Bd. 1, Heft 2). — Diese kurzen Hinweise mögen genügen.

## § 2. Grundlagen der Analogie.

Die Gesetze der Addition und Multiplikation für den Bereich der positiven ganzen Zahlen einschl. Null, die wir unserer Analogie zugrunde legen, lauten [1]):

**1. (Existenz.)** Zu zwei Zahlen $a$ und $b$ gibt es stets eine Zahl $c$, so daß

$$a+b=c \quad | \quad a\cdot b=c$$

ist.

**2. (Eindeutigkeit.)** Aus

$$a+b=c \quad | \quad a\cdot b=c$$

und

$$a+b=c' \quad | \quad a\cdot b=c'$$

folgt stets

$$c=c'.$$

**3. (Faktorgleichheit.)** Aus

$$a+b=a+b' \quad | \quad a\cdot b=a\cdot b'$$

folgt stets

$$b=b' \cdot \quad | \quad b=b', \text{ wenn } a\neq 0.$$

**4. (Assoziation.)** Es ist

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad | \quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

**5. (Kommutation.)** Es ist

$$a+b=b+a \quad | \quad a\cdot b=b\cdot a.$$

**6. (Distribution.)** Es ist

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Alle Gesetze sind genau parallel für Addition und Multiplikation. Nur bei **3.** tritt für die Multiplikation eine einschränkende Bedingung hinzu, die bereits das Bestehen einer Verbindung von Addition und Multiplikation ahnen läßt. Diese wird dann durch **6.** in ihrem vollen Umfange bestimmt. Die Gleichung **6.** wird überhaupt bei dem Aufbau einer ganzen Kette von Verknüpfungen aus Gesetzen analog **1.—6.** sehr wichtig werden. Denn sie stellt die Vermittlung von einer Verknüpfung zur nächsthöheren dar.

Auf dem gewöhnlichen iterativen Wege der Entwicklung kommt man nun zur Potenz $a^b=c$. Für sie gelten Gesetze analog den in **1., 2., 3.** ausgesprochenen; sonst läßt sich auf „legalem“ (d. h. die Analogien zu **1.—6.** herstellendem) Wege eine Zusammengehörigkeit der drei Verknüpfungen nicht feststellen. Namentlich ist das Distributivgesetz

$$a^{(b\,\cdot\, c)}=(a^b)^c$$

nicht mit **6.** in Übereinstimmung zu bringen, und — umgekehrt gelesen — als Assoziation auch nicht mit **4.** Die Potenzierung ist also ungeeignet, die legale Kette von Verknüpfungen über die Addition und Multiplikation hinaus fortzusetzen. Wir suchen dies auf allgemeinerem Wege zu erreichen.

## § 3. Aufstellung der Grundgleichungen.

Als allgemeines Zeichen für eine der Addition und Multiplikation analoge Zahlverknüpfung wählen wir:

$$S_\lambda(a,b)=c;\ (\lambda=1,2,3,\ldots).$$

[1]) $a$, $b$, $c$, ... bedeuten hier und im folgenden stets Elemente des zugrunde gelegten Bereichs aller positiven, ganzen Zahlen einschl. Null.

Es werde so zur Herstellung der Analogie zunächst

$$S_1(a, b) = a + b,\ S_2(a, b) = a \cdot b$$

gesetzt. Unsere Frage kann dann dahin formuliert werden, ob es möglich ist, weitere Zahlverknüpfungen $S_\lambda$ für $\lambda > 2$ zu finden, so daß sie Gesetzen gehorchen, die analog **1.—6.** gebaut sind.

Als derartige Gesetze stellen wir folgende auf [1]):

**(1) (Existenz.)** Zu zwei Zahlen $a$ und $b$ gibt es stets eine Zahl $c$, so daß

$$S_\lambda(a, b) = c$$

ist.

**(2) (Eindeutigkeit.)** Aus

$$S_\lambda(a, b) = c \text{ und } S_\lambda(a, b) = c'$$

folgt stets

$$c = c'.$$

**(3) (Faktorgleichheit.)** Wird mit $k_\mu$ eine Zahl bezeichnet, die für jedes $b$ die Gleichung

$$S_\mu(b, k_\mu) = b$$

erfüllt [2]), so folgt aus

$$S_\lambda(a, b) = S_\lambda(a, b')$$

immer

$$b = b',$$

wenn

$$a \neq k_\mu;\ \ (\mu < \lambda)$$

ist.

**(4) (Assoziation.)** Es ist

$$S_\lambda(a, S_\lambda(b, c)) = S_\lambda(S_\lambda(a, b), c).$$

**(5) (Kommutation,)** Es ist

$$S_\lambda(a, b) = S_\lambda(b, a).$$

**(6) (Distribution.)** Es ist für $\mu < \lambda$

$$S_\lambda(a, S_\mu(b, c)) = S_{\varphi(\lambda, \mu)}(S_{\psi(\lambda, \mu)}(a, b),\ S_{\chi(\lambda, \mu)}(a, c)).$$

## § 4. Fortsetzung.

Hierzu sind einige Bemerkungen zu machen. — Zunächst wird durch **(3)** der Unterschied zwischen Addition und Multiplikation in **3.** erledigt, dadurch daß es zwar ein $S_1$ aber kein $S_0$ gibt. — Außerdem ergibt sich aus **(5)** und **(2)**, daß, wenn es ein $k_\mu$ gibt, auch nur ein solches existiert. Denn gäbe es noch eine Zahl $k'_\mu$, die ebenfalls für jedes $b$ die Gleichung

$$S_\mu(b, k'_\mu) = b$$

[1]) Ursprünglich waren in diesen Grundgleichungen noch die Umkehroperationen $A_\lambda(c, a) = b$ oder $A_\lambda(c, b) = a$ eingeführt. Die Bemerkung, daß diese Einführung vermieden werden könne (wodurch manche Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt wurden), verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn *H. Hasse*. Ihm bin ich auch für den Hinweis auf den Eindeutigkeitsbeweis für die Zahlen $k_\mu$ in § 4 und auf manche Ungenauigkeiten (die nunmehr beseitigt sind) zu Dank verpflichtet. Vor allen Dingen verdanke ich ihm die Anregung, das Element $k_\mu$ (das „Einselement", „Nullelement", die „Operationskonstante") gleich in die Grundgleichungen einzuführen.

[2]) Die Existenz einer solchen Zahl $k_\mu$ ist keineswegs eine Folge aus den Grundgesetzen und wird auch in **(3)** nicht gefordert, sondern nur berücksichtigt. Falls $k_\mu$ nicht vorhanden, soll die betr. Einschränkung in **(3)** fortfallen.

erfüllte, so folgte

$$k_\mu = S_\mu(k_\mu, k'_\mu) = S_\mu(k'_\mu, k_\mu) = k'_\mu.$$

Für die gewöhnliche Addition, die wir im folgenden als Verknüpfung $S_1$ wählen, existiert $k_1 = 0$, ebenso für die gewöhnliche Multiplikation als Verknüpfung $S_2 : k_2 = 1$.

Von besonderem Interesse ist, wie schon bemerkt, die Grundgleichung **(6)**. Da wir nämlich von allen $S_\lambda$ bisher nur $S_1$ und $S_2$ kennen, so ist es wichtig, festzustellen, wie sich Verknüpfungen höheren Ranges — d. h. solche, bei denen $\lambda > 2$ ist — zu diesen bekannten und allgemein zu solchen niedrigeren Ranges — d. h. solchen $S_\mu$, für die $\mu < \lambda$ ist — verhalten, sobald wir letztere als bekannt annehmen dürfen. Die Gleichung **(6)** dient uns, kurz gesagt, als heuristisches Prinzip bei der Konstruktion unbekannter Verknüpfungen. Sie ist auch die einzige, die etwas derartiges leisten kann. Ihre rechte (erklärende) Seite muß daher diesen heuristischen Charakter bewahren. Gleichzeitig aber gilt es, alle Möglichkeiten der Verbindung einer zu konstruierenden Verknüpfung mit bekannten festzuhalten. So mußten wir zunächst nur einen funktionalen Zusammenhang irgendwelcher Art zwischen den zerlegenden Verknüpfungen rechts und den zerlegten Verknüpfungen links bei dieser Grundgleichung festhalten. Daß diese Funktionen $\varphi$, $\psi$, $\chi$ ganzzahlige sein müssen, ist selbstverständlich. Außerdem aber müssen wir sie aus den soeben erwähnten Gründen noch folgenden Forderungen unterwerfen.

**(6) a.** Es darf weder $\varphi$, noch $\psi$, noch $\chi > \lambda$ sein.

**(6) b.** Es muß entweder $\varphi$, oder $\psi$, oder $\chi < \lambda$ sein.

Diese Forderungen stellen wir, damit wir sicher sind, auf der rechten, erklärenden Seite

a) nicht plötzlich eine über unsere Diskussion hinausgehende, sondern

b) mindestens eine bekannte Verknüpfung

zu finden. Fernerhin müssen wir verlangen, daß, wenn wir $S_1(a, b) = a + b$, $S_2(a, b) = a \cdot b$ setzen, die Gleichung **6.** befriedigt wird, daß somit

**(6) c.** $$\varphi(2, 1) = 1, \quad \psi(2, 1) = \chi(2, 1) = 2$$

ist.

## § 5. Gang der Untersuchung und Voruntersuchung.

Unsere Untersuchung schreitet nun so fort, daß wir für ein bestimmtes $\lambda$ und ein bestimmtes $\mu$ alle Möglichkeiten der $\varphi$, $\psi$, $\chi$ durchsprechen und sehen, ob sie sich mit den anderen aufgestellten Gesetzen **(1)—(5)** widerspruchslos vereinigen lassen, d. h. ob nie die Gleichung $0 = 1$ erscheinen kann [1]). Tun sie das nicht, so kann diese Art, ein $S_\lambda$ und ein $S_\mu$ zu verbinden, nicht für den Aufbau einer Kette von Verknüpfungen in Frage kommen. Ein $S_\lambda$ sehen wir ferner dann als bestimmt und als ein Glied in dieser Kette an, wenn sich nachweisen läßt, daß für die Vereinigung mit allen $S_\mu$, für die $\mu < \lambda$ ist, sich nie ein solcher Widerspruch ergibt. Ferner schließen wir alle die $S_\lambda(a, b) = c$ von der Fortführung der Kette aus, bei denen $c$, wie auch $a$ und $b$ gewählt werden, höchstens eine end-

[1]) So ist z. B. die iterative Multiplikation in ihrer Vereinigung mit der Addition widerspruchslos.

liche Zahl von Werten annimmt. Wir nennen solche Verknüpfungen trivial. Ein besonders wichtiger Fall der Trivialität ist $S_\lambda(a, b) =$ constans.

Wir könnten nun sofort damit beginnen, die Untersuchung für $\lambda = 3$ und $\mu = 1, 2$ durchzuführen. Indessen wird es sich als zweckmäßig erweisen, wenn wir erst einmal den Fall $\lambda = 2$, $\mu = 1$ erwägen. Denn noch steht es gar nicht fest, ob die gewöhnliche, iterative Multiplikation, deren Kennzeichen die Gleichung $a \cdot 1 = a$ ist, die einzige Verknüpfung zweiten Ranges ist, die mit **(1)—(6)** verträglich ist. Bisher wissen wir nur, daß diese Gleichung $a \cdot 1 = a$ eine Möglichkeit darstellt, $S_2$ mit $S_1$ widerspruchsfrei zu verbinden. Wir werden also, um uns lediglich des Legalitätsprinzipes zu bedienen, zunächst sogar die Forderung **(6) c.** fallen lassen. In der Voruntersuchung erörtern wir daher alle Möglichkeiten der $\varphi$, $\psi$, $\chi$, die überhaupt nach **(6) a.** und **(6) b.** in Frage kommen, für $\lambda = 2$, $\mu = 1$.

## § 6. Voruntersuchung: Diskussion der Multiplikation.

Als solche Wertmöglichkeiten ergeben sich nun folgende 7:

| | $\mathbf{I}_\sigma$ | $\mathbf{II}_\sigma$ | $\mathbf{III}_\sigma$ | IV |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $\sigma$ | $\sigma$ | $\sigma$ | 1 |
| $\psi$ | 1 | 1 | 2 | 2 |
| $\chi$ | 1 | 2 | 1 | 2 |

($\sigma = 1$ oder 2).

Diese reduzieren sich aber sofort auf 5, da $\mathbf{II}_\sigma$ und $\mathbf{III}_\sigma$ zusammenfallen; denn nach $\mathbf{II}_\sigma$ ist unter Benutzung von **(5)**

$$S_2(a, S_1(b, c)) = S_\sigma(S_1(a, b), S_2(a, c)) = S_\sigma(S_2(a, c), S_1(a, b)).$$

Aus **(5)** und $\mathbf{III}_\sigma$ folgt andererseits

$$S_2(a, S_1(b, c)) = S_2(a, S_1(c, b)) = S_\sigma(S_2(a, c), S_1(a, b)).$$

Ob man also das Verhalten von $S_2$ und $S_1$ zueinander nach $\mathbf{II}_\sigma$ oder $\mathbf{III}_\sigma$ bestimmt, ist gleichgültig.

Wir wenden uns zur Untersuchung der sonach noch übrigen Unterfälle.

### $\mathbf{I}_\sigma$.

Es ist

$$S_2(a, b) = S_2(a, S_1(b, 0)) = S_\sigma(S_1(a, b), S_1(a, 0))$$
$$(a_1) \qquad = S_\sigma(a + b, a).$$

Andererseits ist

$$S_2(a, b) = S_2(S_1(a, 0),\ b) = S_\sigma(S_1(a, b), S_1(0, b))$$
$$(a_2) \qquad = S_\sigma(a + b, b).$$

Für jedes $a \neq b$ ist sicher $a + b \neq 0$. Daher können wir, da $\sigma \leqq 2$ ist, nach **(3)** aus $(a_1)$ und $(a_2)$ folgern:

$$a = b \text{ immer dann, wenn } a \neq b.$$

Wir sehen also, daß **(6)** nach $\mathbf{I}_\sigma$ entwickelt mit anderen Grundgleichungen (u. a. **(3)**) einen Widerspruch ergibt. Nach unseren Grundsätzen wird somit $S_2$ durch $\mathbf{I}_\sigma$ nicht bestimmt; diese Entwicklung scheidet aus.

erfüllte, so folgte

$$k_\mu = S_\mu(k_\mu, k'_\mu) = S_\mu(k'_\mu, k_\mu) = k'_\mu.$$

Für die gewöhnliche Addition, die wir im folgenden als Verknüpfung $S_1$ wählen, existiert $k_1 = 0$, ebenso für die gewöhnliche Multiplikation als Verknüpfung $S_2 : k_2 = 1$.

Von besonderem Interesse ist, wie schon bemerkt, die Grundgleichung **(6)**. Da wir nämlich von allen $S_\lambda$ bisher nur $S_1$ und $S_2$ kennen, so ist es wichtig, festzustellen, wie sich Verknüpfungen höheren Ranges — d. h. solche, bei denen $\lambda > 2$ ist — zu diesen bekannten und allgemein zu solchen niedrigeren Ranges — d. h. solchen $S_\mu$, für die $\mu < \lambda$ ist — verhalten, sobald wir letztere als bekannt annehmen dürfen. Die Gleichung **(6)** dient uns, kurz gesagt, als heuristisches Prinzip bei der Konstruktion unbekannter Verknüpfungen. Sie ist auch die einzige, die etwas derartiges leisten kann. Ihre rechte (erklärende) Seite muß daher diesen heuristischen Charakter bewahren. Gleichzeitig aber gilt es, alle Möglichkeiten der Verbindung einer zu konstruierenden Verknüpfung mit bekannten festzuhalten. So mußten wir zunächst nur einen funktionalen Zusammenhang irgendwelcher Art zwischen den zerlegenden Verknüpfungen rechts und den zerlegten Verknüpfungen links bei dieser Grundgleichung festhalten. Daß diese Funktionen $\varphi$, $\psi$, $\chi$ ganzzahlige sein müssen, ist selbstverständlich. Außerdem aber müssen wir sie aus den soeben erwähnten Gründen noch folgenden Forderungen unterwerfen.

**(6) a.** Es darf weder $\varphi$, noch $\psi$, noch $\chi > \lambda$ sein.

**(6) b.** Es muß entweder $\varphi$, oder $\psi$, oder $\chi < \lambda$ sein.

Diese Forderungen stellen wir, damit wir sicher sind, auf der rechten, erklärenden Seite

a) nicht plötzlich eine über unsere Diskussion hinausgehende, sondern

b) mindestens eine bekannte Verknüpfung

zu finden. Fernerhin müssen wir verlangen, daß, wenn wir $S_1(a, b) = a + b$, $S_2(a, b) = a \cdot b$ setzen, die Gleichung **6.** befriedigt wird, daß somit

**(6) c.** $$\varphi(2, 1) = 1, \quad \psi(2, 1) = \chi(2, 1) = 2$$

ist.

## § 5. Gang der Untersuchung und Voruntersuchung.

Unsere Untersuchung schreitet nun so fort, daß wir für ein bestimmtes $\lambda$ und ein bestimmtes $\mu$ alle Möglichkeiten der $\varphi$, $\psi$, $\chi$ durchsprechen und sehen, ob sie sich mit den anderen aufgestellten Gesetzen **(1)—(5)** widerspruchslos vereinigen lassen, d. h. ob nie die Gleichung $0 = 1$ erscheinen kann [1]). Tun sie das nicht, so kann diese Art, ein $S_\lambda$ und ein $S_\mu$ zu verbinden, nicht für den Aufbau einer Kette von Verknüpfungen in Frage kommen. Ein $S_\lambda$ sehen wir ferner dann als bestimmt und als ein Glied in dieser Kette an, wenn sich nachweisen läßt, daß für die Vereinigung mit allen $S_\mu$, für die $\mu < \lambda$ ist, sich nie ein solcher Widerspruch ergibt. Ferner schließen wir alle die $S_\lambda(a, b) = c$ von der Fortführung der Kette aus, bei denen $c$, wie auch $a$ und $b$ gewählt werden, höchstens eine end-

[1]) So ist z. B. die iterative Multiplikatiou in ihrer Vereinigung mit der Addition widerspruchslos.

liche Zahl von Werten annimmt. Wir nennen solche Verknüpfungen trivial. Ein besonders wichtiger Fall der Trivialität ist $S_\lambda(a, b) = \text{constans}$.

Wir könnten nun sofort damit beginnen, die Untersuchung für $\lambda = 3$ und $\mu = 1, 2$ durchzuführen. Indessen wird es sich als zweckmäßig erweisen, wenn wir erst einmal den Fall $\lambda = 2$, $\mu = 1$ erwägen. Denn noch steht es gar nicht fest, ob die gewöhnliche, iterative Multiplikation, deren Kennzeichen die Gleichung $a \cdot 1 = a$ ist, die einzige Verknüpfung zweiten Ranges ist, die mit **(1)—(6)** verträglich ist. Bisher wissen wir nur, daß diese Gleichung $a \cdot 1 = a$ eine Möglichkeit darstellt, $S_2$ mit $S_1$ widerspruchsfrei zu verbinden. Wir werden also, um uns lediglich des Legalitätsprinzipes zu bedienen, zunächst sogar die Forderung **(6) c.** fallen lassen. In der Voruntersuchung erörtern wir daher alle Möglichkeiten der $\varphi$, $\psi$, $\chi$, die überhaupt nach **(6) a.** und **(6) b.** in Frage kommen, für $\lambda = 2$, $\mu = 1$.

## § 6. Voruntersuchung: Diskussion der Multiplikation.

Als solche Wertmöglichkeiten ergeben sich nun folgende 7:

| | $\mathbf{I}_\sigma$ | $\mathbf{II}_\sigma$ | $\mathbf{III}_\sigma$ | IV |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $\sigma$ | $\sigma$ | $\sigma$ | 1 |
| $\psi$ | 1 | 1 | 2 | 2 |
| $\chi$ | 1 | 2 | 1 | 2 |

($\sigma = 1$ oder 2).

Diese reduzieren sich aber sofort auf 5, da $\mathbf{II}_\sigma$ und $\mathbf{III}_\sigma$ zusammenfallen; denn nach $\mathbf{II}_\sigma$ ist unter Benutzung von **(5)**

$$S_2(a, S_1(b, c)) = S_\sigma(S_1(a, b), S_2(a, c)) = S_\sigma(S_2(a, c), S_1(a, b)).$$

Aus **(5)** und $\mathbf{III}_\sigma$ folgt andererseits

$$S_2(a, S_1(b, c)) = S_2(a, S_1(c, b)) = S_\sigma(S_2(a, c), S_1(a, b)).$$

Ob man also das Verhalten von $S_2$ und $S_1$ zueinander nach $\mathbf{II}_\sigma$ oder $\mathbf{III}_\sigma$ bestimmt, ist gleichgültig.

Wir wenden uns zur Untersuchung der sonach noch übrigen Unterfälle.

### $\mathbf{I}_\sigma$.

Es ist

$$\begin{aligned} S_2(a, b) &= S_2(a, S_1(b, 0)) = S_\sigma(S_1(a, b), S_1(a, 0)) \\ &= S_\sigma(a + b, a). \end{aligned} \tag{$a_1$}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} S_2(a, b) &= S_2(S_1(a, 0), b) = S_\sigma(S_1(a, b), S_1(0, b)) \\ &= S_\sigma(a + b, b). \end{aligned} \tag{$a_2$}$$

Für jedes $a \neq b$ ist sicher $a + b \neq 0$. Daher können wir, da $\sigma \leqq 2$ ist, nach **(3)** aus $(a_1)$ und $(a_2)$ folgern:

$$a = b \text{ immer dann, wenn } a \neq b.$$

Wir sehen also, daß **(6)** nach $\mathbf{I}_\sigma$ entwickelt mit anderen Grundgleichungen (u. a. **(3)**) einen Widerspruch ergibt. Nach unseren Grundsätzen wird somit $S_2$ durch $\mathbf{I}_\sigma$ nicht bestimmt; diese Entwicklung scheidet aus.

$\mathbf{II}_\sigma$.

Es ist einerseits

$$S_2(a, b) = S_2(S_1(0, a), b) = S_\sigma(S_1(0, b), S_2(a, b))$$
$$(\beta_1) \qquad = S_\sigma(b, S_2(a, b)),$$

andererseits

$$S_2(a, b) = S_2(a, S_1(0, b)) = S_\sigma(S_1(a, 0), S_2(a, b))$$
$$(\beta_2) \qquad = S_\sigma(a, S_2(a, b)).$$

Aus $(\beta_1)$ und $(\beta_2)$ ergibt sich für $\sigma = 1$ nach **(3)** stets $a = b = 0$. Jedes $a' \neq 0$ oder $b' \neq 0$ liefert also einen Widerspruch. Daher ist $\mathbf{II}_1$ auszuschalten.

Für $\sigma = 2$ unterscheiden wir 2 Fälle. Entweder gibt es mindestens ein Paar $a, b$, für das $S_2(a, b) \neq 0$ ist, oder es gibt kein solches. Im letzten Falle wäre $S_2(a, b)$ konstant $= 0$, mithin trivial. — Für jedes Paar $a, b$, für das $S_2(a, b) \neq 0$ ist, folgt nun nach **(3)** aus $(\beta_1)$ und $(\beta_2)$ mit $\sigma = 2$:

$$a = b.$$

Für alle Paare $a \neq b$ ist daher $S_2(a, b) = 0$ zu setzen (sonst würde, wie oben, $a = b$ geschlossen werden können), und nur $S_2(a, a)$ kann $\neq 0$ sein. Nun ist aber für jedes $a$

$$S_2(a, a) = S_2(S_1(a, 0), a) = S_2(S_1(a, a), S_2(a, 0))$$
$$= S_2(a + a, S_2(a, 0)).$$

Nach obigem ist für jedes $a \neq 0$

$$S_2(a, 0) = 0,$$

und da aus $a \neq 0$ auch $a + a \neq 0$ folgt, ist sonach auch

$$S_2(a, a) = 0 \text{ für alle } a \neq 0.$$

Ist endlich auch $a = 0$, so ist

$$S_2(0, 0) = S_2(S_1(0, 0), 0) = S_2(S_1(0, 0), S_2(0, 0)).$$

Wäre nun $S_2(0, 0) = k \neq 0$, so folgte demnach

$$k = S_2(0, k) = 0.$$

Um diesen Widerspruch zu vermeiden, müssen wir $k = 0$ setzen. Dann ist aber $S_2(a, b)$ für jedes $a$ und $b$ konstant $= 0$, mithin liegt der einfache Fall der Trivialität vor.

## § 7. Fortsetzung: Allgemeine Multiplikation.

Im folgenden bezeichnen wir die Zahl $x$, die die Gleichung

$$S_1(x, c) = b$$

befriedigt, durch $b_c$. Damit sie wirklich existiere, d. h. eine positive ganze Zahl inkl. Null sei, muß $0 \leqq c \leqq b$ sein. Es ist insbesondere

$$b_b = 0; \quad b_0 = b$$

für jedes $b$ vorhanden.

Für die weitere Diskussion der Multiplikation bleibt also nur noch eine Distributivformel übrig, die der Forderung **(6) c.** entspricht. Ob sich aus ihrer Gültigkeit als einzige Möglichkeit für $S_2$ die uns als widerspruchsfrei bekannte iterative Multiplikation $a \cdot 1 = a$ ergibt, steht nunmehr in Frage. Wir untersuchen daher:

## IV.

$$S_2(a, S_1(b, c)) = S_1(S_2(a, b), S_2(a, c)).$$

Für $c = 0$ folgt hieraus

$$S_2(a, b) = S_1(S_2(a, b), S_2(a, 0)),$$

also

$$S_2(a, 0) = 0.$$

In dieser Hinsicht stimmt $S_2(a, b)$ durchaus mit $a \cdot b$ überein.

Weiterhin ist für alle $b \geqq c \geqq 0$

$$S_2(a, b) = S_2(a, S_1(b_c, c)) = S_1(S_2(a, b_c), S_2(a, c)).$$

Für $c = 1$ wird mithin, wenn $b \geqq 1$ ist,

$$S_2(a, b) = S_1(S_2(a, b_1), S_2(a, 1)).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$S_2(a, 1) = F(a),$$

so erhalten wir zunächst für beliebige $a$ und $b$

$$S_1(F(a), F(b)) = S_1(S_2(a, 1), S_2(b, 1)) = S_2(S_1(a, b), 1) = F(S_1(a, b)),$$

also

$$F(a) + F(b) = F(a + b).$$

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen:

($\alpha$) $\qquad S_2(a, b) = F(a \cdot b) = S_2(a \cdot b, 1)$ für $b \geqq 1$.

Zu diesem Zweck beweisen wir:

($\beta$) $\qquad S_2(a, b) = S_1(S_2(a, b_c), F(a \cdot c))$ für $b \geqq c \geqq 1$,

eine Gleichung, die für $c = b$ in ($\alpha$) übergeht.

($\beta$) ist richtig für $c = 1$ (s. o.). Angenommen, es gelte für ein bestimmtes $c = n < b$. Dann ist

$$\begin{aligned} S_2(a, b) &= S_1(S_2(a, S_1(b_{n+1}, 1)), F(a \,.\, n)) \\ &= S_1(S_1(S_2(a, b_{n+1}), S_2(a, 1)), F(a \,.\, n)) \\ &= S_1(S_2(a, b_{n+1}), S_1(F(a), F(a \,.\, n))) \\ &= S_1(S_2(a, b_{n+1}), F(a \,.\, (n + 1))). \end{aligned}$$

Damit ist ($\beta$) und mit ihm ($\alpha$) für alle $b \geqq 1$ bewiesen.

*Jede Verknüpfung zweiten Ranges (allgemeine Multiplikation) erweist sich also als funktional abhängig von der gewöhnlichen Multiplikation.* Die Funktion $F$, durch die sie in ihrer Allgemeinheit festgelegt wird, muß die Bedingung erfüllen:

$$F(a) + F(b) = F(a + b).$$

Außerdem muß

$$F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$$

also

$$F(0) = 0$$

sein. Woraus sich auch ergibt, daß die obige Gleichung ($\alpha$) auch für $b = 0$ gilt. Denn es folgt ja aus dem früher abgeleiteten $S_2(a, 0) = 0$:

$$S_2(a, 0) = 0 = F(0) = F(a \cdot 0).$$

Setzt man nun

$$F(1) = C,$$

so ergibt sich:

$$F(2) = F(1 + 1) = F(1) + F(1) = C + C = C \cdot 2,$$

und allgemein durch vollständige Induktion:

$$F(a) = C \cdot a$$

für jedes $a$ (auch $a = 0$).

Daher folgt aus $(a)$:

$$S_2(a, b) = F(a \cdot b) = C \cdot a \cdot b. \quad (C \neq 0)\ ^1).$$

Sämtliche Entwicklungen von $S_2(a, b)$ können unter ausschließlicher Zuhilfenahme der gewöhnlichen, iterativen Multiplikation durchgeführt werden. Da nun die letztere, wie vorausgesetzt, widerspruchsfrei im Sinne von § 3 ist; so muß es auch $S_2(a, b)$ sein.

Damit ist nachgewiesen, daß *die allgemeine Multiplikation als die Fortsetzung der mit der gewöhnlichen Addition $S_1$ beginnenden, legal (auf Grund von* **(1)—(6)**) *weitergeführten Kette anzusehen ist.*

Die gewöhnliche Multiplikation $a \cdot b$ ergibt sich hiernach als die conditio seiu qua non zum Verständnis der allgemeinen arithmetischen Multiplikation $S_2(a, b) = C \cdot a \cdot b$, als deren Sonderfall ($C = 1$) sie zunächst erscheinen mag.

Da wir im folgenden die Existenz einer zur Multipilkation gehörigen Operationskonstanten $k_2$ (vgl. **(3)**) wiederholt voraussetzen, müssen wir deren Existenzbedingungen untersuchen. Soll für jedes $a$

$$S_2(a, k_2) = C \cdot a \cdot k_2 = a$$

sein, so muß dies insbesondere für $a = 1$ gelten, d. h.

$$C \cdot k_2 = 1$$

sein. Das ist im Bereiche der natürlichen Zahlen nur für $C = k_2 = 1$ möglich.

## § 8. Ergebnis der Voruntersuchung.

Damit ist folgendes Resultat gewonnen:

Wird in der Kette der Verknüpfnungen $S_1(a, b) = a + b$ gesetzt, so kommt als $S_2(a, b)$ nur eine Verknüpfung in Frage, die mit der gewöhnlichen Multiplikation sehr nahe verwandt ist. Sie ist mit dieser identisch in ihrem Verhalten gegenüber der Addition (Forderung **(6) c.**), weicht aber darin von ihr ab, daß $S_2(a, 1)$ nicht gleich $a$ sein muß, sondern gleich $C \cdot a$ gesetzt werden kann ($C$ beliebig $\neq 0$), solange nicht das Vorhandensein einer Operationskonstante $k_2$ gefordert wird. Diese Forderung läßt sich im Gebiet der natürlichen Zahlen nur durch die Multiplikation befriedigen, bei der $C = 1$ gesetzt wird. Die gewöhnliche Multiplikation erscheint daher als ein zum Verständnis der allgemeinen Operation zweiter Stufe (Multiplikation) besonders wichtiger Spezialfall. Ihm eignen Unterschiede gesetzlicher Natur von der allgemeinen Multiplikation nur insofern, als bei ihm (im Gebiet der natürlichen Zahlen) allein die Existenz der Operationskonstante $k_2$ gesichert ist.

Da wir im folgenden von der Existenz von $k_2 = 1$ Gebrauch machen werden. so wollen wir im weiteren Verlauf unserer Untersuchung $S_2(a, b) = a \cdot b$ annehmen.

---

[1]) Für $C = 0$ würde Trivialität eintreten: $S_2(a, b) = 0$.

## § 9. Hauptuntersuchung: Werttripel.

Nunmehr tritt $S_3(a, b)$ als Objekt der Diskussion auf. Für das Verhalten dieser neuen Operation zur Addition und Multiplikation gemäß **(6)** wird also für $\lambda = 3, \mu = 1$ und $\lambda = 3, \mu = 2$ je eine Reihe von Werten $\varphi, \psi, \chi$ anzusetzen sein. In jeder dieser beiden Reihen sind alle Möglichkeiten der $\varphi, \psi, \chi$ zu erschöpfen, und dann jedes Tripel der einen Reihe mit jedem Tripel der anderen Reihe zusammenzustellen. Wir erhalten nun unter Berücksichtigung von **(6) a.** und **(6) b.** in jeder Reihe folgende 26 Fälle:

| | $\mathbf{I}_\varrho$ | $\mathbf{II}_\varrho$ | $\mathbf{III}_\varrho$ | $\mathbf{IV}_\varrho$ | $\mathbf{V}_\varrho$ | $\mathbf{VI}_\varrho$ | $\mathbf{VII}_\varrho$ | $\mathbf{VIII}_\varrho$ | **IX** | **X** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $\varrho$ | $\varrho$ | $\varrho$ | $\varrho$ | $\varrho$ | $\varrho$ | $\varrho$ | $\varrho$ | 1 | 2 |
| $\psi$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| $\chi$ | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 |

$(\varrho = 1, 2, 3)$.

Hiernach sind im ganzen $26 \cdot 26 = 676$ Möglichkeiten zu diskutieren.

## § 10. Fortsetzung: Reduktionsregeln.

Wir geben nun zunächst einige allgemeine Regeln an, durch deren Anwendung sich die Zahl der zu besprechenden Fälle erheblich reduzieren läßt.

**Regel I.** *Zwei Fälle $\varphi, \psi, \chi$ und $\varphi', \psi', \chi'$ sind dann miteinander identisch, wenn $\varphi = \varphi'$, $\psi = \chi'$, $\chi = \psi'$ ist.*

**Beweis**: Es ist nach der Zerlegung mit $\varphi, \psi, \chi$:

$$S_\lambda(a, S_\mu(b, c)) = S_\varphi(S_\psi(a, b),\ S_\chi(a, c)) = S_\varphi(S_\chi(a, c),\ S_\psi(a, b)).$$

Zerlegt man nach $\varphi', \psi', \chi'$, so erhält man

$$S_\lambda(a, S_\mu(b, c)) = S_\lambda(a, S_\mu(c, b)) = S_\varphi, (S_\psi, (a, c),\ S_\chi, (a, b)).$$

Beide Zerlegungen sind also unter den angegebenen Bedingungen ineinander überführbar.

**Anwendung**: In jeder Reihe sind die Tripel $\mathbf{II}_\varrho$, $\mathbf{III}_\varrho$, $\mathbf{VI}_\varrho$ resp. mit $\mathbf{IV}_\varrho$, $\mathbf{VII}_\varrho$, $\mathbf{VIII}_\varrho$ identisch, so daß noch $17 \cdot 17 = 289$ Unterfälle verbleiben.

**Regel II:** *Bedeutet $\tau$ einen, $\tau'$ den anderen der beiden Werte $\psi$ oder $\chi$ einer Entwicklung*

$$S_3(a, S_\mu(b, c)) = S_\varphi(S_\psi(a, b),\ S_\chi(a, c));\ (\mu = 1 \text{ oder } 2),$$

*so ist*

$$S_\tau(a, k_\mu) = S_\tau(b, k_\mu)\ ^{1})$$

*für jedes Paar $a, b$, für das*

$$S_{\tau'}(a, b) \neq k_\nu;\quad (0 < \nu < \varphi)\ ^{2})$$

*ist.*

---

[1]) $k_1 = 0$ existiert, und auf Grund unserer Voraussetzung in § 8 auch $k_2 = 1$.

[2]) Hier kann $0 < \nu$ genommen werden, weil es kein $k_0$ gibt. Für $\varphi = 1$ fällt also diese Bedingung fort. Im übrigen impliziert sie wegen $\varphi \leqq \lambda = 3$ nur die existierenden $k_1$. $k_2$..

**Beweis:** Es ist

$$(a) \qquad S_3(a,b) = S_3(a, S_\mu(b, k_\mu)) = S_\varphi(S_\psi(a,b),\ S_\chi(a, k_\mu))$$
$$(a') \qquad S_3(a,b) = S_3(S_\mu(a, k_\mu, (b) = S_\varphi(S_\psi(a,b), S_\chi(k_\mu, b))$$
$$(b) \qquad S_3(a,b) = S_3(a, S_\mu(k_\mu, b)) = S_\varphi(S_\psi(a, k_\mu), S_\chi(a,b))$$
$$(b') \qquad S_3(a,b) = S_3(S_\mu(k_\mu, a), b) = S_\varphi(S_\psi(k_\mu, b), S_\chi(a,b)).$$

Durch Vergleichung von $(a)$ und $(a')$ gewinnt man nach **(3)** und **(5)** unter der angegebenen Bedingung

$$S_\chi(a, k_\mu) = S_\chi(b, k_\mu),$$

und ebenso aus $(b.)$ und $(b'.)$

$$S_\varphi(a, k_\mu) = S_\psi(b, k_\mu),$$

womit die Regel bewiesen ist.

**Anwendung**: Da hier eine besondere Voraussetzung über Zahlen und Verknüpfungen gemacht wird, müssen wir prüfen, ob die Regel sich auf irgendwelche Werttripel anwenden läßt, und welche durch sie ausgeschieden werden. Die Anwendung der Regel macht keine besonderen Schwierigkeiten bei folgenden Wertsystemen

$$(A_1) \qquad \mu = 1,\ \tau = 1,\ \tau' < 3,\ \varphi \leqq 3;$$
$$(A_2) \qquad \mu = 2,\ \tau < 3,\ \tau' < 3,\ \varphi \leqq 3.$$

Hierbei ist nämlich die Bedingung der Regel stets erfüllt, sobald $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a \neq b$ ist, da dann sicher

$$S_{\tau'}(a,b) = a + b \text{ oder } a \cdot b > 1,$$

also von $k_1 = 0$ und $k_2 = 1$ verschieden ist. Für irgendein solches Paar folgt aber dann nach Regel II:

$$(A_1') \qquad S_1(a,0) = S_1(b,0),\ \text{d. h. } a + 0 = b + 0;$$
$$(A_2') \qquad S_\tau(a,1) = S_\tau(b,1),\ \text{d. h. } a + 1 = b + 1 \text{ oder } a \cdot 1 = b \cdot 1;$$

also immer $a = b$, im Widerspruch zu der Voraussetzung $a \neq b$. Die in $(A_1)$ und $(A_2)$ aufgeführten Tripel scheiden demnach aus.

Ebenso läßt sich Regel II mit Erfolg auf folgende Fälle anwenden:

$$(B_1) \qquad \mu = 1,\ \tau = 1,\ \tau' = 3,\ \varphi = 1;$$
$$(B_2) \qquad \mu = 2,\ \tau < 3,\ \tau' = 3,\ \varphi = 1;$$

in denen nach Anm. 2 a. v. S. gar keine einschränkende Bedingung zu berücksichtigen ist, also Regel II für alle $a, b$ gilt. Wählt man hier irgendein Paar $a, b$, für das $a \neq b$ ist, so ergibt die Anwendung der Regel wie eben bei $(A_1')$, $(A_2')$ (da die hierbei ausschlaggebenden $\mu$ und $\tau$ dieselben geblieben sind) den Widerspruch $a = b$. Die Fälle $(B_1)$ und $(B_2)$ werden also ebenfalls durch Regel II ausgeschieden.

Schließlich betrachten wir noch die Fälle:

$$(C_1) \qquad \mu = 1,\ \tau = 1,\ \tau' = 3,\ 1 < \varphi \leqq 3;$$
$$(C_2) \qquad \mu = 2,\ \tau < 3,\ \tau' = 3,\ 1 < \varphi \leqq 3;$$

in denen $k_1 = 0$ und u. U. auch, wenn nämlich $\varphi = 3$ ist, $k_2 = 1$ in der Bedingung der Regel zu berücksichtigen sind, also zur Anwendung $S_3(a,b) \neq 0$ und u. U. auch $\neq 1$ sein muß. Wir dürfen annehmen, daß die Verknüpfung $S_3(a,b)$ so beschaffen

ist, daß Paare $a, b$ mit $S_3(a, b) > 1$ existieren, da sie sonst nur die Werte 0 und 1 lieferte, also trivial wäre. Für jedes solche Paar $a, b$, für das überdies $a \neq b$ ist, folgt durch Anwendung von Regel II durch genau denselben Schluß, wie oben bei $(A_1')$, $(A_2')$ (da wieder $\tau$ und $\mu$ dieselben sind), der Widerspruch $a = b$. Also muß in den Fällen $(C_1)$ und $(C_2)$ gelten:

$$(C) \qquad S_3(a, b) \leqq 1, \text{ wenn } a \neq b,$$

und höchstens die $S_3(a, a)$ liefern Werte $> 1$.

Wir zeigen nun weiter, daß auch die $S_3(a, a)$ höchstens mit Ausnahme von $S_3(0, 0)$ und $S_3(1, 1)$ Werte $\leqq 1$ liefern müssen, womit dann auch in den Fällen $(C_1)$ und $(C_2)$ die Verknüpfung $S_3(a, b)$ als höchstens der 4 Werte 0, 1, $S_3(0, 0)$, $S_3(1, 1)$ fähig und somit als trivial erkannt sein wird.

Um den Nachweis für die angegebene Behauptung zu führen, trennen wir die beiden Fälle $\varphi = 2$ und $\varphi = 3$. Beidesmal dürfen wir in der jeweiligen Entwicklung (6) nach Regel I ohne Beschränkung $\psi = \tau$ und $\chi = \tau' = 3$ annehmen.

$$\underline{\varphi = 2.}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_3(a, a) &= S_3(a, S_\mu(k_\mu, a)) = S_2(S_\tau(a, k_\mu), S_3(a, a)) \\ &= S_\tau(a, k_\mu) \cdot S_3(a, a). \end{aligned}$$

Bei den in $(C_1)$ und $(C_2)$ möglichen Kombinationen $\mu$, $\tau$ ist nun

$$S_\tau(a, k_\mu) = a + 0 \text{ oder } a + 1 \text{ oder } a \cdot 1,$$

also sicher $\neq 1$ für $a > 1$. Daher folgt

$$S_3(a, a) = 0 \quad \text{für } a > 1.$$

$$\underline{\varphi = 3.}$$

Dann ist

$$S_3(a, a) = S_3(a, S_\mu(a, k_\mu)) = S_3(S_\tau(a, a), S_3(a, k_\mu)).$$

Da nun für $a > 1$ nach $(C)$ stets $S_3(a, k_\mu) \leqq 1$, und außerdem

$$S_\tau(a, a) = \begin{Bmatrix} a + a \\ a \cdot a \end{Bmatrix} > 1 \geqq S_3(a, k_\mu)$$

ist, folgt durch erneute Anwendung von $(C)$:

$$S_3(a, a) \leqq 1 \text{ für } a > 1.$$

Damit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen, und somit auch die Trivialität der Fälle $(C_1)$ und $(C_2)$ erkannt.

Stellen wir die Fälle $(A_1)$, $(B_1)$, $(C_1)$ und $(A_2)$, $(B_2)$, $(C_2)$ zusammen, so ergibt sich, daß die Anwendung der Regel II zum Ausschluß durch Widerspruch oder Trivialität führt in den Fällen, in denen

$$\begin{aligned} &\mu = 1,\ \tau = 1,\ \tau' \leqq 3,\ \varphi \leqq 3; \\ &\mu = 2,\ \tau < 3,\ \tau' \leqq 3,\ \varphi \leqq 3 \end{aligned}$$

ist. Demnach lassen Regel I und II noch übrig

$$\begin{aligned} \text{für } \mu = 1 &: \mathbf{V}_\varrho, \mathbf{VI}_\varrho, \mathbf{IX}, \mathbf{X}, \\ \text{„ } \mu = 2 &: \mathbf{IX}, \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Jetzt sind noch $8 \cdot 2 = 16$ Unterfälle zu erledigen.

**Regel III.** *Ist* $S_\mu(b, c) \neq S_{\mu'}(b, c)$ *für mindestens ein Paar* $b, c$, *so darf nicht zugleich*

$$\varphi(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda, \mu'),\ \psi(\lambda, \mu) = \psi(\lambda, \mu'),\ \chi(\lambda, \mu) = \chi(\lambda, \mu')$$

*sein.*

**Beweis:** Wäre die Behauptung unrichtig, so folgte nach **(6)**

$$S_\lambda(a, S_\mu(b, c)) = S_\lambda(a, S_{\mu'}(b, c))$$

für alle $a, b, c$. Wählte man dann irgendein $a \neq k_\nu$; $(\nu < \lambda)$, so ergäbe sich aus **(3)** der Widerspruch

$$S_\mu(b, c) = S_{\mu'}(b, c)$$

gegen die vorausgesetzte Existenz eines Paares $b, c$, für das $S_\mu(b, c) \neq S_{\mu'}(b, c)$ ist.

**Anwendung:** Da für $\mu = 1$, $\mu' = 2$ die Voraussetzung $S_1(b, c) \neq S_2(b, c)$ sicher durch ein Paar $b, c$ realisiert werden kann, so darf das Tripel **IX** der ersten Reihe $(\mu = 1)$ nicht mit dem Tripel **IX** der zweiten Reihe $(\mu = 2)$ zusammen zur Bestimmung von $S_3$ genommen werden, und ebensowenig **X** $(\mu = 1)$ mit **X** $(\mu = 2)$.

Die Regeln I, II, III haben also die Zahl der zu diskutierenden Fälle von 676 auf 14 herabgedrückt. Bei deren Besprechung wird uns noch folgende Regel gute Dienste leisten.

**Regel IV.** *Existiert* $k_\mu$, *so ist*

$$S_\lambda(a, k_\mu) = S_\varphi(S_\psi(a, k_\mu), S_\chi(a, k_\mu)).$$

**Beweis:** Es ist.

$$S_\lambda(a, k_\mu) = S_\lambda(a, S_\mu(k_\mu, k_\mu)) = S_\varphi(S_\psi(a, k_\mu), S_\chi(a, k_\mu)).$$

**Anwendung:** Wenden wir diese Regel auf die Tripel **IX** und **X** der Reihe $\mu = 2$ an, so ist $k_\mu = k_2 = 1$, mithin für jedes $a$

$$\text{bei IX} : S_3(a, 1) = S_1(S_3(a, 1), S_3(a, 1)) = 0,$$

$$\text{bei X} : S_3(a, 1) = S_2(S_3(a, 1), S_3(a, 1)) \leqq 1.$$

Für den letzten Fall ist noch zu bemerken, daß die Annahme

$$S_3(a, 1) = 0 \text{ für jedes } a$$

die Trivialität von $S_3(a, b)$ nach sich zieht. Es ist nämlich (immer nach **X** $(\mu = 2)$):

$$S_3(a, b) = S_3(a, S_2(1, b)) = S_2(S_3(a, 1), S_3(a, b)),$$

woraus, wenn $S_3(a, 1) = 0$ für jedes $a$ wäre, sich allgemein

$$S_3(a, b) = 0$$

ergäbe.

Insbesondere muß $S_3(1, 1) = 1$ sein, denn wäre $S_3(1, 1) = 0$, so folgte für jedes $a$: $S_3(a, 1) = S_3(S_2(a, 1), 1) = S_2(S_3(a, 1), S_3(1, 1)) = 0$, was nicht sein sollte.

## § 11. Fortsetzung: Diskusion der Restfälle.

Wir treten nunmehr in die Besprechung darüber ein, welche von den noch vorhandenen Möglichkeiten, $S_3$ mit $S_1$ und $S_2$ zu verbinden, den Gleichungen **(1)—(6)** widerspruchslos genügen. Wir untersuchen zunächst, ob sich bei einem Tripel schon allein durch den Versuch, $S_3$ mit $S_1$ zu vereinigen, Widersprüche oder Trivialitäten ergeben. Ist das nicht der Fall, so versuchen wir dieses Tripel der ersten Reihe mit einem der zweiten Reihe zu verbinden; d. h. wir suchen ein Tripel, durch das $S_3$ mit $S_2$ verbunden wird, mit der bis jetzt noch nicht als wider-

spruchsvoll erkannten Möglichkeit, $S_3$ mit $S_1$ zu vereinigen, in Einklang zu bringen. *Nur dann, wenn sich nachweisen läßt, daß es ein Tripel der ersten Reihe und mit ihm zusammen eines der zweiten Reihe gibt, bei deren Durchführung (auf Grund der Gesetze* **(1)—(6)** *sich nie ein Widerspruch, d. i. eine Gleichung* $0 = 1$, *ergeben kann, soll* $S_3$ *als bestimmt angesehen werden* [1]). Man kann dann daran gehen, ein $S_4$ in gleicher Weise aus der Kombination dreier Reihen von Werttripeln zu bestimmen, usf.

Durch unsere Regeln I—III kommen nun als zu diskutierende Tripel nur in Frage:

für $\mu = 1$: $\mathbf{V}_\varrho$, $\mathbf{VI}_\varrho$, **IX**, **X**; für $\mu = 2$: **IX** und **X**.

Hierbei können $\mathbf{V}_\varrho$ wie $\mathbf{VI}_\varrho$ jedes mit **IX** und **X** ($\mu = 2$) kombiniert werden, während für **IX** ($\mu = 1$) nur die Kombination mit **X** ($\mu = 2$), für **X** ($\mu = 1$) nur die mit **IX** ($\mu = 2$) zulässig ist. — Ferner ist zu beachten, daß nach Regel IV bei der Kombination mit **IX** ($\mu = 2$) stets $S_3(a, 1) = 0$ zu setzen ist. Bei der Kombination mit **X** ($\mu = 2$) ist dagegen immer $S_3(a, 1) \leqq 1$ und $S_3(1, 1) = 1$ anzunehmen.

Wir beginnen also mit der Besprechung von:

$$\underline{\mathbf{V}_\varrho;\ (\mu = 1);\ (\psi = \chi = 2).}$$

Es ist

$$\begin{aligned} S_3(a, b) &= S_3(a, S_1(b, 0)) = S_\varrho(S_2(a, b), S_2(a, 0)) \\ &= S_\varrho(c, 0);\ (c = a \cdot b). \end{aligned}$$

Für $\varrho = 2$ ist daher

$$S_3(a, b) = 0;\ \text{trivial.}$$

Für $\varrho = 3$ ist:

$$\begin{aligned} S_3(a, b) &= S_3(c, 0) = S_3(c, S_1(0, 0)) \\ &= S_3(S_2(c, 0),\ S_2(c, 0)) = S_3(0, 0) \\ &= \text{constans; trivial.} \end{aligned}$$

Für $\varrho = 1$ wird; wenn $b = 1$, also $c = a$ genommen wird:

$$S_3(a, 1) = S_1(a, 0) = a,$$

und das ist für alle $a > 1$ weder mit **IX** ($\mu = 2$) noch mit **X** ($\mu = 2$) in Übereinstimmung zu bringen (Regel IV, Anwendung).

Dadurch wird jede Möglichkeit ausgeschlossen, $\mathbf{V}_\varrho$ zur Vereinigung von $S_3$ und $S_1$ zu benutzen und so die Kette der Verknüpfungen fortzusetzen.

Wir wenden uns nun zu

$$\underline{\mathbf{VI}_\varrho;\ (\mu = 1;\ (\psi = 2,\ \chi = 3).}$$

Bei der Untersuchung von $\mathbf{VI}_\varrho$ gehen wir von folgenden Gleichungen aus:

(A) $$\begin{aligned} S_3(a, b) &= S_3(a, S_1(0, b)) = S_\varrho(S_2(a, 0), S_3(a, b)) \\ &= S_\varrho(0, S_3(a, b)). \end{aligned}$$

(B) $$S_3(a, b) = S_3(a, S_1(b_1, 1)) = S_\varrho(S_2(a, b_1), S_3(a, 1))$$

[1]) Wie dieser Nachweis geführt wird, ob durch Konstruktion einer bestimmten Rechenregel (wie das oben bei $S_2$ geschah) oder wie sonst, ist gleichgültig. Ebenso wie die widerspruchsfreie Vereinigung sich konkret als Rechenregel darstellen läßt.

für jedes $b \geqq 1$. Aus (B) läßt sich, $a = 1$ gesetzt, ableiten:

(C) $$S_3(1, b) = S_\varrho(S_2(1, b_1), S_3(1, 1)) = S_\varrho(b_1 S_3(1, 1)).$$

Wir behandeln nun nacheinander die 3 Fälle für $\varrho = 1, 2, 3$.

### $\mathbf{VI}_1$.

Wir entwickeln hier nach (C), indem wir $\varrho = 1$ setzen, wie folgt:

$$S_3(1, b) = S_1(b_1, S_3(1, 1)); \ (b \geqq 1)$$

Da sich nicht ohne weiteres ein Widerspruch ablesen läßt, kombinieren wir $\mathbf{VI}_1 (\mu = 1)$ mit **IX** und **X** ($\mu = 2$). — Nach **IX** ($\mu = 2$) ist — gemäß Regel IV Anw. — sowohl $S_3(1, b) = 0$, wie $S_3(1, 1) = 0$. Daher ist

$$0 = b_1; \ (b \geqq 1)$$

Das ergibt für jedes $b > 1$ einen Widerspruch. Diese Kombination scheidet also aus.

Nach **X** ($\mu = 2$) ist $S_3(1, 1) = 1$, also $S_1(b_1, S_3(1, 1)) = b$ zu setzen, für alle $b \geqq 1$. Andererseits ist aber $S_3(1, b) \leqq 1$, sodaß wir hätten:

$$1 \geqq b.$$

Auch diese Kombination führt somit für alle $b > 1$ zu Widersprüchen. Dadurch ist die Verwendung von $\mathbf{VI}_1$ unmöglich gemacht worden.

Bei

### $\mathbf{VI}_2$

kann aus (A), $\varrho = 2$ gesetzt, sofort

$$S_3(a, b) = S_2(0, S_3(a, b)) = 0$$

und hieraus auf die Trivialität geschlossen werden.

Etwas komplizierter gestaltet sich die Diskussion von

### $\mathbf{VI}_3$.

Hier folgt aus (C) für $\varrho = 3$:

(C′) $$S_3(1, b) = S_3(b_1, S_3(1, 1)); \ (b \geqq 1)$$

Wir kombinieren wieder mit **IX** und **X** ($\mu = 2$). Für **IX** ($\mu = 2$) verwandelt sich (nach Regel IV Anw.) (C′) in:

$$0 = S_3(b_1, 0); \ (b \geqq 1)$$

D. h. es ist für jedes $c \geqq 0$

$$S_3(c, 0) = 0.$$

Nun folgt aus (A), wenn wir dann $\varrho = 3$ nehmen,

$$S_3(a, b) = S_3(0, S_3(a, b));$$

mithin ist allgemein

$$S_3(a, b) = 0.$$

Damit ist die Trivialität von $\mathbf{VI}_3$ ($\mu = 1$) bei Verbindung mit **IX** ($\mu = 2$) nachgewiesen.

Kombinieren wir $\mathbf{VI}_3$ mit **X** ($\mu = 2$), so muß $S_3(1, 1) = 1$ gesetzt werden. Aus (C′) läßt sich dann schließen:

$$S_3(1, b) = S_3(b_1, 1); \ (b \geqq 1)$$

Daraus folgt vermittelst des Schlusses von $n$ auf $n + 1$:

$$S_3(a, 1) = S_3(1, 1) = 1 \text{ für jedes } a \geqq 1.$$

Setzen wir nun in (B) $\varrho = 3$, so erhalten wir

$$S_3(a, b) = S_3(S_2(a, b_1), S_3(a, 1)); \ (b \geqq 1)$$

und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $S_3(a, 1) = 1$ für $a \geqq 1$ ist:

$$S_3(a, b) = 1 \text{ für } a \geqq 1 \text{ und } b \geqq 1,$$

Damit ist gezeigt, daß bei Verkoppelung von $\mathbf{VI_3}(\mu = 1)$ mit $\mathbf{X}\,(\mu = 2)$ $S_3(a, b)$ nur folgende drei Werte annehmen kann: $S_3(0, 0)$, $S_3(0, 1) = S_3(1, 0)$ und 1, wodurch die Trivialität in diesem Fall erwiesen ist.

Folglich ist auch $\mathbf{VI_3}$ und somit überhaupt $\mathbf{VI_\varrho}$ nicht zu gebrauchen.

Wir gehen nun dazu über, die beiden letzten Möglichkeiten der ersten Reihe, die Tripel **IX** und **X** für $\mu = 1$ zu diskutieren. Sollten sie mit Werttripeln der zweiten Reihe verbunden werden, so kommt hierfür nur die kreuzweise Kombination mit **IX** und **X** $(\mu = 2)$ in Frage. (Regel III Anw.)

**IX**; $(\mu = 1)$; $(\psi = \chi = 3, \varphi = 1)$.

Für $b \geqq 1$ ist dann

$$S_3(1, b) = S_3(1, S_1(b_1, 1)) = S_1(S_3(1, b_1), S_3(1, 1)).$$

Mithin ist, da für $\mathbf{X}(\mu = 2)$ nach Regel IV, Anwendung $S_3(1, 1) = 1$ ist,

$$S_3(1, b) = S_3(1, b_1) + 1 \geqq 1.$$

Da aber (Regel IV, Anwendung) $S_3(1, b) \leqq 1$ sein muß, folgt also

$$S_3(1, b) = 1 \text{ für jedes } b \geqq 1.$$

Für $b = 2$, $b_1 = 1$ folgt dann der Widerspruch

$$1 = 1 + 1.$$

Somit läßt sich **IX** $(\mu = 1)$ nicht mit **X** $(\mu = 2)$ verbinden.

**X**; $(\mu = 1)$; $(\psi = \chi = 3, \varphi = 2)$.

Für $b \geqq 1$ ist dann

$$S_3(a, b) = S_3(a, S_1(b, 1)) = S_2(S_3(a, b), S_3(a, 1)).$$

Danach folgt für die Verbindung mit **IX** $(\mu = 2)$ nach Regel IV, Anwendung:

$$S_3(a, b) = S_2(S_3(a, b_1), 0) = 0; \ (b \geqq 1).$$

Entwickeln wir weiter $S_3(a, 0)$ nach **IX** $(\mu = 2)$, so wird

$$\begin{aligned} S_3(a, 0) &= S_3(a, S_2(0, 0)) = S_1(S_3(a, 0), S_3(a, 0)) \\ &= S_3(a, 0) + S_3(a, 0) = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist $S_3(a, b) = 0$ für jedes Paar $a, b$, also trivial, und auch dieser letzte Fall muß ausscheiden.

## § 12. Schlußresultat.

Unsere Untersuchungen haben also gezeigt, daß alle 676 Möglichkeiten, $S_3$ mit $S_1$ und $S_2$ zu verbinden, entweder zu Widersprüchen mit den Gleichungen **(1)—(6)** oder zur Trivialität von $S_3$ führen.

Das Schlußresultat unserer Betrachtungen ist sonach folgendes:

*Versucht man, auf Grund der Gesetze* **(1)—(6)**, *eine Kette aufeinander folgender Verknüpfungen zu konstruieren, als deren erstes, bekanntes Glied*

*die Addition auftreten soll, so erscheint als zweites Glied dieser Kette eine Verknüpfung, die sich von der gewöhnlichen (iterativen) Multiplikation nur darin unterscheidet, daß jede Zahl a, mit 1 verknüpft, nicht a selbst als Resultat ergibt, sondern ein bestimmtes Vielfaches von a.*

*Hält man als zweites Glied der Kette die gewöhnliche Multiplikation fest, so scheitern alle Versuche, auf legalem Wege, d. i. durch die Gleichungen* **(1)—(6)** *ein drittes Glied der Kette zu finden.*

Man kann dieses Ergebnis auch so ausdrücken: Eine Arithmetik, die ihre Verknüpfungen auf der Grundlage der Addition und iterativen Multiplikation an Hand von **(1)—(6)** aufbauen will, liefert über diese beiden Grundrechnungsarten hinaus keine wesentlich neuen (d. i. nicht-trivalen oder widerspruchsfreien) Verknüpfungen.

Wir schließen hieran noch einige Bemerkungen. — Zunächst: Es ist in unseren Untersuchungen nichts darüber gesagt, ob sich bei Zugrundelegung der allgemeinen Multiplikation das Bild ändert. So wenig wir das für wahrscheinlich halten, so komplizieren sich doch die Untersuchungen durch den Wegfall von $k_2$ im betrachteten Grundbereich, da dann Regel II für $\mu = 2$ unbrauchbar wird. — Ferner: Es ist sehr fraglich, ob der negative Abschluß auch dann einträte, wenn von den Gleichungen **(1)—(6)** einige wegfielen. Da es sich aber hier um Analogieschlüsse handelt, und **(1)—(6)** in der Form **1.—6.** sicherlich für Addition und iterative Multiplikation gelten, so müßte man — um ein positives Resultat zu gewinnen — entweder die Analogie anders durchführen oder folgenden Weg einschlagen: Aus axiomatischen Erwägungen wäre zunächst zu entnehmen, welche Gleichungen notwendig und hinreichend sind, um **1.—6.** für Addition und Multiplikation abzuleiten. Diese Axiome könnten als Grundlage der Analogie genommen werden, und auf ihnen weitere Untersuchungen aufgebaut werden. Erst dann dürfte das letzte Wort über die Vorzüge und Nachteile der Legalität gegenüber der Iteration gesprochen sein.

JUL 29 1925

Grad. R. R. 3

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

**Schäfer, Schlesinger, Schottky**

von

**K. Hensel.**

---

**Band 154.**

Heft 3.

Ausgegeben den 25. Juni

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1925

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

# Band 154. Heft 3.

## Inhaltsverzeichnis.


**Müller, F.,** Zur Geometrie der Gruppe aller Berührungstransformationen der Kugeln . . . . . Seite 131

**Artin, E.** und **Hasse, H.,** Über den zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste im Körper $k\zeta$ der $l$-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von $k\zeta$ . . . . . — 143

**Roeser, E.,** Ein neuer Zusammenhang zwischen den Trigonometrien der beiden nichteuklidischen Ebenen . . . . . — 149

**Roeser, E.,** Das rechtwinklige Fünfeck der hyperbolischen Ebene und die *Engel-Napier*sche Regel . . . . . — 151

**König, R.** und **Krafft, M.,** Über Reihenentwicklung analytischer Funktionen . — 164

**Hasse, Helmut,** Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern . . . . . — 174

**Disse, A.,** Über die Beziehungen zwischen Logarithmus und Numerus in einem $\mathfrak{p}$-adischen algebraischen Körper . . . . . — 178


*An unsere Mitarbeiter!*

*Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.*

*Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.*


Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.



Diesem Heft liegt ein Prospekt der Firma **L. W. Seidel & Sohn in Wien** bei, den wir besonderer Beachtung empfehlen.

# Zur Geometrie der Gruppe aller Berührungstransformationen der Kugeln.

Von *F. Müller* in Dresden.

Untersucht man die Gruppe der Berührungstransformationen der Kugeln geometrisch, so stößt man auf gewisse zweideutige Verwandtschaften der Kugeln, die alle Transformationen jener Gruppe aufzubauen gestatten [1]). Die Mehrdeutigkeit dieser fundamentalen Transformationen erschwert aber die Übersicht gerade bei den Auflösungsfragen der allgemeinen Transformationen in fundamentale. Dieser Schwierigkeit begegnet man, wenn man sich nicht der Notwendigkeit verschließt, die sich bei der Untersuchung von Berührungstransformationen immer einzustellen scheint: der Einführung orientierter Flächenelemente [2]). Dadurch zerlegt man jene zweideutigen Verwandtschaften in zwei eindeutige, die innerhalb des Kontinuums der sphärischen Kugelkomplexe [3]) dieselbe Rolle spielen wie die Transformationen durch reziproke Radien im Felde der nicht orientierten Kugeln.

Daher stelle ich zunächst die für die folgenden Untersuchungen benötigten Eigenschaften der sphärischen Komplexe zusammen; darnach werden alle involutorischen Transformationen dieser Komplexe bestimmt, die Berührungstransformationen der Kugeln darstellen, und schließlich wird gezeigt, wie sich alle Transformationen orientierter Kugeln aus solchen Transformationen zusammensetzen lassen.

Zur Behandlung der orientierten Kugeln = Sphären [4]) werden wir uns zweier Hilfsmittel bedienen:

1. der Abbildung der Sphären $(x-a)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$ auf die Punkte $(a, \beta, \gamma, ir)$ eines vierdimensionalen Raumes und

2. der Abbildung derselben Sphären auf die Punkte $(a, \beta, \gamma, r)$ eines vierdimensionalen Raumes. Die erste Methode ist ein Seitenstück einer schon von *Chasles* und *Möbius* benutzten Abbildung der nullteiligen Kreise; ihre Grund-

[1]) *F. Müller*, Synth. Aufbau d. Gruppe d. Berührungstransformationen d. Kugeln, Dresden (1920).

[2]) *F. Klein*, Einleitung in d. höhere Geometrie I, Göttingen (1893); — *E. Study*, Besprechg. von Lie-Scheffers, Geometrie d. Berührungstransformationen, Göttinger gelehrte Anzeigen (1897).

[3]) Bezeichnung von *E. Müller*, Die Geom. orientierter Kugeln nach Graßmannschen Methoden, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898); — s. auch Encyklopädie III AB. 7.

[4]) Wo die Orientierung hervorgehoben werden soll, sprechen wir von „Sphären, Plänen, Konen"; s. *A. Loehrl*, Über konforme und äquilonge Transf. im Raum, München (1908).

züge findet man bei *Klein* [1]) zusammengestellt. Die zweite Abbildung ist eine Übertragung der Zyklographie *W. Fiedlers*. Über eine umfassendere Verallgemeinerung hat *E. Müller* im vergangenen Jahr auf der Leipziger Tagung berichtet [2]). Wird als die dort benutzte fundamentale Fläche $\mu$ eine geeignete Fläche zweiter Ordnung eingeführt, so erhalten wir gerade die unter 2. definierte Abbildung. Beide Abbildungen ordnen den Punkten $t_1 : t_2 : t_3 : t_4 : t_5$ eines vierdimensionalen Raumes $T$ die Zentralrisse einer im uneigentlichen Raum gelegenen $M_3^2$ aus den betreffenden Punkten auf den Bildraum $B(t_4 = 0)$ zu. Wählt man nämlich diese $M_3^2 = \mu$ als Schnitt der Räume: $\Omega(t, t) \equiv t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + t_5^2 = 0$, $t_5 = 0$, so erhält man die unter 1. eingeführte „Minimalprojektion". Ist $\mu$ dagegen der Schnitt der beiden Räume $\Omega(t, t) = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_4^2 + t_5^2 = 0$, $t_5 = 0$, so wird die „zyklographische Abbildung" hervorgerufen. Die so definierten $M_3^2$ sind als $\mu$-Flächen möglich, da sie mit $t_4 = 0$, $t_5 = 0$ den absoluten Kugelkreis gemein haben.

Die Nebeneinanderbenutzung beider Abbildungen verspricht dieselben Annehmlichkeiten wie die Nebeneinanderbetrachtung von Kugel und einschaligem Hyperboloid im dreidimensionalen Punktraum. Diese hat den Vorzug der Anschaulichkeit und heuristischen Wert; jene werden wir bei analytischen Untersuchungen in der durch Hinzunahme einer überzähligen Koordinate erweiterten Form der hexasphärischen Koordinaten der Punkte eines $R_5$ bevorzugen.

## § 1. Die sphärischen Kugelkomplexe.

I. Die zyklographische Projektion ordnet jedem Punkte $t_1 : t_2 : t_3 : t_4 : t_5$ aus $T$ im Bildraum $B$ die Sphäre um den Punkt $\left(\alpha = \frac{t_1}{t_5},\ \beta = \frac{t_2}{t_5},\ \gamma = \frac{t_3}{t_5}\right)$ und vom Radius $r = \frac{t_4}{t_5}$ zu. Ein linearer Raum $L \equiv \sum_1^5 a_k t_k = 0$ liefert also als Bilder seiner Punkte $\infty^3$ Sphären, nämlich um jeden Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ eine Sphäre mit dem Radius $r = -\frac{a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma + a_5}{a_4}$, so daß alle Bildsphären den Plan $\frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_5}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = 0$ unter Winkeln schneiden, für die $\cos\varphi = \frac{-a_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ ist, wobei den Wurzeln beide Male das gleiche Zeichen zukommt. Jedem linearen Raum in $T$ entspricht also in $B$ ein planer Komplex.

Insbesondere entspricht dem Raum $t_4 = 0$ die Gesamtheit der Punkte von $B$ als Komplex aller Nullkugeln; überhaupt bilden sich die Räume $t_4 = \text{const.}$ als die Komplexe aller Sphären vom Radius $r = \text{const.}$ ab. $t_4 = \infty$ liefert den Komplex aller Ebenen. Fehlt $t_4$ in der Gleichung des Raums, so wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$; dem Raum ist der Komplex aller Kugeln zugeordnet, deren Zentren in einer Ebene liegen. Den linearen Tangentialräumen an $\mu$ entsprechen plane Nullkomplexe (spezielle plane Komplexe).

---

[1]) Siehe Anm. 2 auf S. 131.

[2]) Jahresberichte D. M. V. 32 (1923), auch D. M. V. 14 (1905).

Die Punkte der Schnittebene zweier linearen Räume $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ bilden sich ab als $\infty^2$ Sphären, die zwei Pläne unter Winkeln mit vorgeschriebenen Kosinuswerten schneiden. Da in dem Büschel $L_1 + \lambda L_2 = 0$ zwei Tangentialräume an $\mu$ liegen, besteht eine Kongruenz zweier planen Komplexe aus den $\infty^2$ Sphären, die zwei Pläne berühren.

Besondere Kongruenzen werden gebildet durch alle Sphären von gegebenem Radius, deren Zentren in einer Ebene liegen, oder durch alle Sphären, die einen Plan längs einer Geraden berühren, oder auch durch alle Sphären, deren Zentren auf einer Geraden liegen.

Die Punkte der Schnittgeraden dreier linearen Räume ergeben in $B$ die $\infty^1$ Sphären, die drei Pläne berühren; sie werden also von einem Konus umhüllt.

Besondere Fälle: Die Schar konzentrischer Sphären wird umhüllt von einem Minimalkegel. Die Schar gleichgroßer Sphären, deren Zentren auf einer Geraden liegen, werden von einem orientierten Zylinder umhüllt. Die parabolischen Sphärenbüschel als Gesamtheiten der Sphären, die einen Plan in einem Punkt berühren, sind die Bilder der Geraden in $T$, die $\mu$ treffen.

II. Von den quadratischen Räumen interessieren uns die untereinander kongruenten projizierenden Räume

$$(t_1 - a\,t_5)^2 + (t_2 - \beta\,t_5)^2 + (t_3 - \gamma\,t_5)^2 - (t_4 - r\,t_5)^2 = 0$$

der $\mu$ aus den Punkten $a : \beta : \gamma : r : 1$ und die damit zentrisch ähnlichen Räume

$$(t_1 - a\,t_5)^2 + (t_2 - \beta\,t_5)^2 + (t_3 - \gamma\,t_5)^2 - (t_4 - r\,t_5)^2 = C\,t_5^2.$$

Erstere wird man als Kegel-, letztere als Hyperboloidräume oder auch, indem $\mu$ der Metrik von $T$ zugrunde gelegt wird, als $T$-Kugeln bezeichnen können. Jene sind dann die $T$-Nullkugeln. Jede $T$-Nullkugel projiziert sich nach $B$ als Gesamtheit der Sphären, die eine Sphäre berühren, die Geraden jeder $T$-Kugel daher in die $\infty^2$ parabolischen Büschel, deren Punkte auf einer Sphäre (Isogonalsphäre) liegen, deren Pläne die dem Mittelpunkt entsprechende Sphäre (Mittelsphäre) berühren, so daß alle Bildsphären die Isogonalsphäre unter gleichen Winkeln schneiden. Jeder $T$-Kugel entspricht also in $B$ ein sphärischer Komplex vom Radius $\sqrt{C}$; jeder $T$-Nullkugel ein sphärischer Nullkomplex.

Insbesondere sei noch hervorgehoben, daß den $T$-Kugeln, deren Mittelpunkt in $B$ liegt, die Kugelgebüsche von $B$ entsprechen, jeder darunter enthaltenen $T$-Nullkugel also die Gesamtheit der Kugeln durch deren Mittelpunkt.

III. Die Berührungstransformationen der $B$-Sphären gehen aus denjenigen Punkttransformationen in $T$ hervor, für die die Treffgeraden von $\mu$ und die $T$-Nullkugeln je einen Körper bilden. Dann bilden auch die $T$-Kugeln einen Körper für die Transformationsgruppe, die nach *Liouvilles* Theorem aus den konformen Punkttransformationen besteht. Dabei denken wir uns den Winkel $\psi$ zweier $T$-Kugeln $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ durch das Doppelverhältnis $\delta$ ihrer Mittelpunkte mit den Mittelpunkten der im Büschel $K_1 + \lambda K_2 = 0$ enthaltenen Nullkugeln als $\psi = \frac{i}{2} \lg \delta$

projektiv erklärt [1]). Dann wissen wir aus *Lie*s und *Klein*s Abhandlung in Annalen 5, daß sich die Gruppe aller in Frage stehenden Transformationen des $T$-Raums aufbauen läßt aus den $\infty^{10}$ Bewegungen und $\infty^1$ Transformationen durch reziproke Radien. Diesen entspricht in $B$ ein Zyklus von konformen Punkttransformationen und gewissen involutorischen Transformationen. Diesen Satz wollen wir als Spezialfall eines allgemeineren ableiten.

In den Rechnungen benutzen wir die oben angekündigten hexasphärischen Koordinaten; nur legen wir wegen der Symmetrie der Formeln sechs allgemeine paarweis orthogonale Komplexe dem Koordinatensystem zugrunde [2]). Bei dieser Wahl bestimmt sich der Radius $\varrho$ des Komplexes $[a_k]$ mit den Koordinaten $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6$ aus der Formel:

$$\varrho^2 = \frac{\Sigma a_k^2}{\left(\Sigma \frac{a_k}{\varrho_k}\right)^2}$$

und der Winkel zweier Komplexe $[a_k]$, $[b_k]$ aus:

$$\cos \psi = \frac{\Sigma a_k b_k}{\sqrt{\Sigma a_k^2}\ \sqrt{\Sigma b_k^2}},$$

wobei der Summationszeiger überall von 1 bis 6 läuft und $\varrho_k$ die Radien der Koordinatenkomplexe bedeuten. $\Sigma a_k^2 = 0$ ist also das Kriterium für Nullkomplexe, $\Sigma \frac{a_k}{\varrho_k} = 0$ das für plane Komplexe.

## § 2. Die involutorischen Verwandtschaften zwischen Komplexen.

Die linearen Transformationen der Komplexkoordinaten $[u_i]$ ordnen jedem sphärischen Komplex wieder einen sphärischen Komplex zu. Beschränkt man sich auf die orthogonalen Transformationen, so hält man die Gesamtheit der Nullkomplexe fest. Da die $\infty^{15}$ Transformationen $\mathfrak{R}$:

$$u_i' = \sum_{j=1}^{6} k_{ij} u_j \quad \text{mit orthogonaler Determinante} \quad K = |k_{ij}|$$

dieser Gruppe auch

$$\cos \psi = \frac{\Sigma u_i v_i}{\sqrt{\Sigma u_i^2}\ \sqrt{\Sigma v_i^2}}$$

invariant lassen, sind sie Berührungstransformationen.

*Prym* hat ein allgemeines Verfahren gelehrt [3]), alle orthogonalen Determinanten 6. Grades durch 15 Parameter auszudrücken. Für die geometrische

---

[1]) Zwei Komplexe, denen die Punkte $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5$, $b_1 : b_2 : b_3 : b_4 : b_5$ entsprechen, schneiden sich daher orthogonal, wenn $\delta = \frac{-\Omega(a,b) \pm \sqrt{(\Omega(a,b))^2 - \Omega(a,a)\Omega(b,b)}}{-\Omega(a,b) \mp \sqrt{(\Omega(a,b))^2 - \Omega(a,a)\Omega(b,b)}} = -1$, also $\Omega(a,b) = 0$ ist. Vergl. *M. Lagally*, Über Flächen mit sphärischen Krümmungslinien, München (1903).

[2]) Encyklopädie III AB 7 (25).

[3]) *F. Prym*, Über orthog., invol. u. orthog.-invol. Substitutionen, Abh. Gesellsch. Wissensch. Göttingen 38 (1892).

Interpretation ist aber die Unterscheidung der Fälle, die die ursprüngliche Form dieser Methode erfordert, brauchbarer. Es sei $\mathfrak{J}$ die Determinante der identischen Transformation $\mathfrak{J}$. Dann zerfallen die Transformationen der Gruppe in:

I. *Cayley*sche Transformationen, wenn $K + J \neq 0$, $K = +1$,

II. Nicht-*Cayley*sche Transformationen, wenn $K + J = 0$, $K = \pm 1$.

Die unter II. fallenden Transformationen werden durch einen Satz von *Cipolla* [1]) auf *Cayley*sche Transformationen reduziert: Ist $\mathfrak{R}$ eine nicht-*Cayley*sche Transformation $n$-ter Ordnung und hat die Determinante $K + J$ den Rang $n - l$, so gibt es eine orthogonale Substitution $\mathfrak{E}$ mit der Determinante:

$$E = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \dots \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \dots \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}, \quad \text{wo} \quad \varepsilon_\nu^2 = 1 \; (\nu = 1, 2, \dots n),$$

so, daß $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{E}\mathfrak{R}$ eine *Cayley*sche Transformation ist; und zwar enthält $E$ genau $l$ Diagonalelemente $(-1)$ [2]).

Die *Cayley*schen orthogonalen Determinanten werden erhalten [3]), indem man mit den Unterdeterminanten $a_{ij}$ einer pseudosymmetrischen Determinante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{16} \\ -a_{12} & 1 & \dots & a_{26} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{16} & -a_{26} & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

die Determinante

$$K = |k_{ij}| = \left| \frac{2a_{ij}}{A} - \delta_{ij} \right|$$

bildet, wobei $\delta_{ij}$ *Kroneckers* Symbol bedeutet.

*Wir bestimmen nun die involutorischen orthogonalen Transformationen.* Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß $K$ mit der transponierten Determinante übereinstimmt; es ist also $k_{ij} = k_{ji}$.

I. $K + J \neq 0$, $K = +1$.

$A$ ist dann so zu wählen, daß die reziproke Determinante $|a_{ij}|$ symmetrisch ausfällt. Zu $a_{ij}$ und $a_{ji}$ gehören daher gleiche Komplemente, nämlich $A^4 a_{ij}$ bezw. $A^4 a_{ji}$. Andrerseits ist $a_{ij} = -a_{ji}$, demnach $A = J$ und $K = J$. *Die Identität ist die einzige Cayleysche Transformation, die involutorisch ist.*

II. $K + J = 0$.

1. $K + J$ sei vom Rang 5. Dann ist $K = -1$ [4]). Die nicht verschwindende Unterdeterminante 5. Grades sei der Minor zu $k_{66} + 1$. Wir bestimmen die *Cayley*sche Transformation $K' = E_6 K = \left| \frac{2a_{ij}}{A} - \delta_{ij} \right|$, woraus folgt $K = E_6 \cdot \left| \frac{2a_{ij}}{A} - \delta_{ij} \right|$.

---

[1]) *W. Widder*, Über orthog., invol. u. orthog.-invol. Substitutionen, Würzburg (1916).

[2]) Die Zeiger der mit $(-1)$ besetzten $\varepsilon_\nu$ sollen auch $E$ angehängt werden.

[3]) z. B. *G. Kowalewski*, Einführung i. d. Determinantentheorie, Leipzig.

[4]) Satz von *Cipolla*, s. *Widder*, a. a. O., S. 3.

Der Involutionscharakter erfordert $a_{6i} = -a_{i6}$ $(i = 1, 2, \ldots 5)$ und $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots 5)$. Als Komplemente in der reziproken Determinante von $A$ erfüllen deren Elemente folglich die Bedingungen $a_{6i} = -a_{i6}$ bezw. $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j \neq 6)$, während auch $a_{ij} = -a_{ji}$ gilt. Mithin ist

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & a_{16} \\ 0 & 1 & 0 & & a_{26} \\ 0 & 0 & 1 & & a_{36} \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_{16} & -a_{26} & -a_{36} & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

und $K = \left| \delta_{ij} - \frac{2a_{i6}\,a_{j6}}{A} \right|$ [1]) oder, da $A = a_{16}^2 + a_{26}^2 + \cdots + a_{56}^2 + 1$, auch

$$K = |\,\delta_{ij} - 2\,A_i A_j\,| \text{ mit der Eigenschaft } \sum_1^6 A_k^2 = 1.$$

*Die Transformation mit dieser Determinante nennen wir Spiegelung $\mathfrak{R}_A$ am Komplex $[A_i]$.* Hierzu sind die Transformationen $\mathfrak{E}_\nu$ mit den Determinanten $E_\nu$ zu zählen; $\mathfrak{E}_\nu$ ist also die Spiegelung am $\nu$-ten Koordinatenkomplex.

*Die sich für niedrigeren Rang von $K + J$ ergebenden Transformationen lassen sich aus diesen Spiegelungen $\mathfrak{R}$ aufbauen.*

2. $K + J$ sei vom Rang 4, also $K = +1$. Von 0 verschieden sei die Determinante, die nach Streichung der beiden letzten Zeilen und Kolonnen übrigbleibt. Die Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen ergibt $\mathfrak{R}_1\,\mathfrak{R}_2$ mit der Determinante $|\,\delta_{ij} - 2\,A_{1i}A_{1j} - 2\,A_{2i}A_{2j} + 4\,A_{1i}A_{2j}\,\Sigma\,A_{1k}A_{2k}\,|$. Stehen die Komplexe $[A_{1i}]$ und $[A_{2i}]$ aufeinander senkrecht, so ist $\mathfrak{R}_1\,\mathfrak{R}_2$ wieder involutorisch.

Alle Transformationen $\mathfrak{R}_1\,\mathfrak{R}_2$ mit orthogonalen Komplexen $[A_{1i}]$, $[A_{2i}]$ gehören zu den nicht-*Cayley*schen Transformationen, für die $K + J$ vom Rang 4 ist. Denn man überzeugt sich durch zweimaliges Rändern leicht, daß $K + J$ verschwindet, und folgert aus dem *Stieltjes*schen Theorem [2]), daß auch alle Unterdeterminanten 5. Grades verschwinden.

Umgekehrt kann jede Transformation $\mathfrak{R}$, für die $K + J$ vom Rang 4 ist, als Aufeinanderfolge zweier Spieglungen an orthogonalen Komplexen erhalten werden. Setzt man nämlich zur Bestimmung von $A_{1i}, A_{2i}$:
$k_{ij} = \delta_{ij} - 2\,A_{1i}\,A_{1j} - 2\,A_{2i}\,A_{2j}$ und unterwirft die Unbekannten den Bedingungen $\Sigma\,A_{1k}\,A_{2k} = 0, \Sigma\,A_{2k}^1 = \Sigma\,A_{2k}^2 = 1$, so folgt

$$\sum_{j=1}^{6} (k_{ij} + \delta_{ij})\,A_{\nu j} = 0 \qquad (\nu = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots 6).$$

Nach Voraussetzung besitzt $|k_{ij} + \delta_{ij}|$ den Rang 4, also bestimmen (die ersten) vier Gleichungen die Verhältnisse der $A_{\nu i}$ mit Hilfe zweier Parameter. Die beiden Komplexe $[A_{\nu i}]$ stehen auf vier Komplexen $[k_{ij} + \delta_{ij}]$ $(i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2, \ldots 6)$ senkrecht. Und zwar dürfen aus dem zu diesem Gebüsch orthogonalen Büschel

---

[1]) Vergl. *Wedekind,* Quadratsummen. Invol. lineare Transf., Festgabe d. techn. Hochschule Karlsruhe (1892). *A. Voß,* Über orthog. Substitutionen, Annalen 13 (1878).

[2]) *E. Pascal,* Repertorium I, S. 131 (1910).

irgend zwei zueinander orthogonaler Komplexe $[A_{1i}]$, $[A_{2i}]$ zur Erzeugung von $K$ benutzt werden. Denn die Spieglungen $\mathfrak{R}_\lambda$, $\mathfrak{R}_\mu$ an den orthogonalen Komplexen $[\lambda_1 A_{1i} + \lambda_2 A_{2i}]$ und $[\mu_1 A_{1i} + \mu_2 A_{2i}]$ liefern die Determinante $|\delta_{ij} - 2 A_{1i} A_{1j} - 2 A_{2i} A_{2j}|$ [1]).

3. $K + J$ besitze den Rang niedriger als 4. Diese Transformationen $\mathfrak{R}$ können wie unter 2. untersucht werden. Sie werden ausnahmslos erhalten durch Aufeinanderfolge von 3, 4, 5 Spieglungen an paarweis orthogonalen Komplexen.

Ist $K + J$ vom Rang 0, sind also alle ihre Elemente $= 0$, so wird $K = |-\delta_{ij}|$. Diese Transformation $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \ldots \mathfrak{E}_6$ wechselt das Vorzeichen des Komplexradius und soll Umstülpung heißen. Das Produkt der Spieglungen an irgend sechs paarweis orthogonalen Komplexen ist stets $\mathfrak{U}$.

Damit ist gezeigt: *Die involutorischen Transformationen werden erschöpft durch Aufeinanderfolgen von Spieglungen an paarweis orthogonalen Komplexen.*

## § 3. Die Spieglungen an sphärischen Komplexen.

Die Ruhekomplexe bei den Spieglungen $u_i' = \sum_{j=1}^{6} (\delta_{ij} - 2 A_i A_j) u_j$ folgen aus den Gleichungen $u_i = \sigma u_i'$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$, die miteinander verträglich sind, wenn

$$|(1 - \sigma)\, \delta_{ij} - 2 A_i A_j| = (\sigma - 1)^5 \cdot (\sigma + 1) = 0$$

ist. Die erste Wurzel liefert für die Ruhekomplexe $[u_i]$ die Bedingung $\Sigma A_j u_j = 0$. Jeder Komplex des Gewebes $\Sigma A_j u_j = 0$ bleibt bei der Spieglung in Ruhe. Die zweite Wurzel ergibt den Komplex $[A_i]$. Der „Hauptkomplex $[A_i]$" wird durch die Spieglung umgestülpt.

In jedem Büschel, dem $[A_i]$ angehört, entsteht eine involutorische Projektivität zwischen den Komplexen. Die beiden Nullkomplexe des Büschels werden also vertauscht, so daß die Transformation so beschrieben werden kann: *Gegeben ist ein (nicht spezieller) Komplex* $[A_i]$. *Jedem Nullkomplex* $[u_i]$ *wird der zweite Nullkomplex des Büschels* $[u_i + \lambda A_i]$ *zugeordnet.* Oder auch nach Einführung des Gebüschs der zu $[A_i]$ und $[u_i]$ gleichzeitig orthogonalen Komplexe: Zwei Nullkomplexe sind einander zugeordnet, wenn alle zu ihnen orthogonalen Komplexe auch zu $[A_i]$ orthogonal sind.

Im zyklographischen Bild wird dadurch auf jedem Durchmesser der „Hauptkugel" eine Involution hervorgerufen, deren Fluchtpunkt im Zentrum der Hauptkugel liegt, deren Doppelelemente die Durchstoßpunkte des Durchmessers durch die Hauptkugel sind. Daher gilt, wenn $r, r'$ die Mittelpunktsentfernungen zweier gepaarten Punkte, $C$ das Quadrat des Hauptkugelhalbmessers bedeuten, $r \cdot r' = C$. Das zyklographische Bild einer Komplexspiegelung ist also eine Transformation durch reziproke Radien bezüglich einer $T$-Kugel.

---

[1]) Allgemein ist $\mathfrak{R}_A \mathfrak{R}_B = \mathfrak{R}_\Gamma \mathfrak{R}_\Delta$, wenn $[\Gamma_i]$, $[\Delta_i]$ dem Büschel $[\alpha A_i + \beta B_i]$ angehören und sich unter dem gleichen Winkel schneiden wie $[A_i]$, $[B_i]$. Wählt man etwa $\Gamma_i = \gamma_1 A_i + \gamma_2 B_i$ so, daß $\Sigma \Gamma_k^2 = 1$ ist, so erfüllt $\Delta_i = -\gamma_2 A_i + (\gamma_1 + 2\gamma_2 \Sigma A_k B_k) B_i$ die Bedingung und ist normiert. Dagegen genügt $\Delta_i' = (\gamma_2 + 2\gamma_1 \Sigma A_k B_k) A_i - \gamma_1 B_i$ der Gleichung $\mathfrak{R}_\Gamma \mathfrak{R}_{\Delta'} = \mathfrak{R}_B \mathfrak{R}_A$.

Durch die Spieglung am Komplex $[A_i]$ wird somit *eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Sphären* — nämlich der Mittelsphären zweier zugeordneten Nullkomplexe jedes Büschels, dem die Isogonalsphäre von $[A_i]$ angehört, hervorgerufen. Das Produkt der Tangentialentfernungen zugeordneter Sphären von der Mittelsphäre von $[A_i]$ gleicht dem Quadrat des Halbmessers von $[A_i]$.

Da alle Sphären des Komplexes $[A_i]$ in Ruhe bleiben, findet man *die einer Sphäre x zugeordnete Sphäre y* als die zweite Sphäre aus dem durch $x$ und die Isogonalsphäre von $[A_i]$ bestimmten Büschel, die irgendeine die Sphäre $x$ berührende Sphäre des Komplexes $[A_i]$ berührt.

Konstruktives Interesse haben die Spieglungen, die reellen Sphären wieder reelle Sphären zuordnen. Dazu ist nötig, daß die Mittelsphäre und das Quadrat des Radius $\varrho$ von $[A_i]$ reell sind. Bei reellem $\varrho$ hat man keine Schwierigkeit, invariante Sphären zu zeichnen, die die Konstruktion zugeordneter Sphären ermöglichen. Ist $\varrho^2 < 0$, so beachte man, daß die Ruhesphären, deren Zentren in einer Durchmesserebene der Mittelsphäre liegen — als Mittelsphären der Nullkomplexe eines Gebüschs — zwei Sphären vom Radius der Mittelsphäre des Hauptkomplexes umhüllen, die sich bei der Spieglung vertauschen.

Da die Spieglung am Komplex $[A_i]$ jeden Durchmesserplan der Isogonalsphäre von $[A_i]$ in diejenige Sphäre des durch ihn bestimmten invarianten Büschels überführt, die die Mittelsphäre von $[A_i]$ berührt, so erkennt man leicht, daß die Spieglungen an Komplexen zusammenfallen mit den im Sinn der Geometrie orientierter Kugeln zerlegten zweideutigen „fundamentalen Transformationen $\mathfrak{F}_0''$ meiner Dissertation. Indem wir nun — im Rahmen unsrer Voraussetzung $\Sigma A_k^2 = 1$ — besondere Annahmen über den Hauptkomplex $[A_i]$ der Spieglung zugrunde legen, erhalten wir die dort aufgeführten

*besonderen Fälle und Entartungen von Spieglungen*:

1. $[A_i]$ sei ein Kugelgebüsch. Die Orientierung wird belanglos; d. h. Sphären auf einer Kugel gehen wieder in Sphären einer Kugel über. Die Spieglungen an Kugelgebüschen sind also Punkttransformationen und zwar Transformationen durch reziproke Radien einschließlich der Spieglungen an Ebenen.

2. Ist die Isogonalsphäre des Komplexes $[A_i]$ eine Nullkugel, so liefert die Spieglung an $[A_i]$ die Transformationen $\mathfrak{F}_0$, die sich durch besonders einfache Konstruktion auszeichnen. Ist die Mittelsphäre des Komplexes $[A_i]$ der reelle Stellvertreter seiner Isogonalsphäre, so wird jeder Durchmesserebene der Mittelsphäre ein bestimmter Pol auf ihr zugeordnet. Wir erhalten die „einfachen“ Transformationen $\mathfrak{F}_*$.

Diese Transformationen verlieren aber bei dieser Betrachtungsweise den Charakter des Besonderen. Als Ausartungen zählen wir noch die Päneverwandtschaften auf:

3. Da der Nullkomplex[1]) $\left[\frac{1}{\varrho_i}\right]$ als Hauptkomplex einer Spieglung ausscheidet,

[1]) Siehe **Anm. 3 auf S. 131.**

kommen hier nur Spieglungen an Komplexen in Frage, zu deren Gewebe der Komplex $\left[\frac{1}{\varrho_i}\right]$ gehört, also Spieglungen an planen Komplexen. Sie decken sich mit den $\mathfrak{Z}_0$-Transformationen *Laguerre*s und *Scheffer*s. Besteht der Hauptkomplex aus allen Sphären gleichen Halbmessers, so ist die Spieglung eine Dilatation. Insbesondere läuft die Spieglung am Nullkugelnkomplex auf eine Umstülpung der Sphären hinaus.

## § 4. Auflösung der allgemeinen Komplextransformationen $\mathfrak{F}$ in Spieglungen.

Die durch $u_i' = \sum_{j=1}^{6} k_{ij} u_j$ vermittelte Transformation $\mathfrak{F}$ führt die sechs Komplexe $[k_{ij}]$ als Koordinatenkomplexe ein. Schrittweise läßt sich diese Transformation folgendermaßen erreichen. Wir suchen zunächst eine Spieglung $\mathfrak{R}_1$ an einem Komplex $[A_i^{(1)}]$ derart, daß in der Determinante $|k_{ij}^{(1)}|$ von $\mathfrak{R}_1\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$ die letzte Zeile $k_{6j}^{(1)} = \delta_{6j}$ wird. Wegen der Orthogonalität ist dann auch $k_{i6}^{(1)} = \delta_{i6}$. Nach dem Multiplikationssatz folgt:

$$k_{ij}^{(1)} = k_{ij} - 2A_j^{(1)} \sum_{\nu=1}^{6} k_{i\nu} A_\nu^{(1)}.$$

Multiplikation mit $k_{i6}$ und Summation über $i$ für $j = 6$ liefert: $A_6^{(1)2} = \frac{1 - k_{66}}{2}$.

Darnach findet man ähnlich für $i = 6$ verfahrend: $A_j^{(1)} = \frac{\delta_{6j} - k_{6j}}{2A_6^{(1)}}$ und daraus endlich die Koeffizienten der Transformation $\mathfrak{F}_1$:

$$k_{ij}^{(1)} = k_{ij} + \frac{(\delta_{i6} - k_{i6})\,(\delta_{6j} - k_{6j})}{1 - k_{66}}.$$

Nun wird $\mathfrak{F}_1$ als Produkt einer Spiegelung $\mathfrak{R}_2$ und einer Transformation $\mathfrak{F}_2$ dargestellt, und zwar wird für $\mathfrak{R}_2$ der Komplex $[A_j^{(2)}]$ so gewählt, daß in der Determinante $|k_{ij}^{(2)}|$ von $\mathfrak{F}_2$ die beiden letzten Zeilen (und Kolonnen) durch $\delta_{ij}$ besetzt sind. Man findet:

$$A_j^{(2)} = \frac{\delta_{5j} - k_{5j}^{(1)}}{2A_5^{(2)}} \quad \text{und} \quad k_{ij}^{(2)} = k_{ij}^{(1)} + \frac{(\delta_{i5} - k_{i5}^{(1)})\,(\delta_{5j} - k_{5j}^{(1)})}{1 - k_{55}^{(1)}}.$$

So kann man fortfahren, indem man der Reihe nach $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{R}_3\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{R}_4\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{F}_4 = \mathfrak{R}_5\mathfrak{F}_5$ setzt und die Spieglungen so wählt, daß immer weitere Zeilen der Determinante mit $\delta_{ij}$ besetzt werden. Je nachdem $\mathfrak{F}$ eine eigentliche oder uneigentliche Determinante besitzt, ist $\mathfrak{F}_5 \equiv \mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{F}_5 \equiv \mathfrak{J}$, mithin

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_3\mathfrak{R}_4\mathfrak{R}_5\mathfrak{E}_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_3\mathfrak{R}_4\mathfrak{R}_5\mathfrak{J}.$$

*Die allgemeinste Komplextransformation kann als Produkt von höchstens sechs Spieglungen erhalten werden.* Dieser Satz ist das — durch *Klein*s Ergebnisse in

Annalen 5 unmittelbar gegebene — Seitenstück zu dem Satz, daß jede Kollineation einer Kugel im $R_5$ im allgemeinen äquivalent ist mit fünf oder sechs Homologien [1]).

Da in jedem Büschel ein Orthogonalkugelnkomplex vorhanden ist, so läßt sich [2]) das Produkt zweier Spieglungen stets auch als Produkt aus einer Punkttransformation und einer Spieglung allgemeiner Art erzeugen. Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses folgt:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{R}_1'\mathfrak{R}_2'\mathfrak{R}_3'\mathfrak{R}_4'\mathfrak{R}_5'\mathfrak{F}_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{R}_1'\mathfrak{R}_2'\mathfrak{R}_3'\mathfrak{R}_4'\mathfrak{F}_0,$$

wobei $\mathfrak{R}_i'$ Spieglungen an Kugelgebüschen, $\mathfrak{F}_0$ eine Spieglung an einem sphärischen Komplex bedeutet. Auf die Sphärentransformationen übergehend dürfen wir daher sagen: *Die allgemeinste Sphärenverwandtschaft kann als Produkt einer konformen Punkttransformation und einer involutorischen Berührungstransformation der Sphären aufgefaßt werden.*

Ebenso schließt man aus dem Vorhandensein eines planen Komplexes in jedem Büschel auf den Satz: *Jede Sphärentransformation läßt sich ausführen als Zusammensetzung einer äquilongen Plänetransformation und einer involutorischen Berührungstransformation der Sphären.*

Diese beiden Sätze zeigen die wiederholt hervorgehobene Dualität zwischen der $G_{10}$ der konformen Punkttransformationen und der $G_{10}$ der äquilongen Plänetransformation. Das Studium der $G_{15}$ aller Berührungstransformationen der Sphären zerfällt demnach in das Studium jener beiden Untergruppen einerseits und der Spieglungen an Komplexen andrerseits. Dieser Weg erscheint für synthetische Betrachtungen durchaus zweckmäßig.

## § 5. Die allgemeinen Verwandtschaften $\mathfrak{F}$.

Die Theorie der allgemeinen Komplexverwandtschaften wird ganz analog wie für Kollineationen einer $M_4^2$ im $R_5$ entwickelt. Unter Hinweis auf *Segres* Encyklopädieartikel können wir uns daher auf die nötigsten Angaben beschränken.

Die Komplexe jedes Gebietes $n^{\text{ter}}$ Stufe gehen in die Komplexe eines Gebietes gleicher Stufe über. Aus der Invarianz des Doppelverhältnisses folgt, daß durch 7 Paare entsprechender Komplexe allgemeiner Lage eine Komplexentransformation vollständig bestimmt ist. Bleiben 7 Komplexe invariant, so bleiben alle Komplexe in Ruhe.

*Im allgemeinen bleiben*, entsprechend den Wurzeln der charakteristischen Gleichung $|k_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = 0$, *6 Komplexe erhalten.* Nach deren Lagerung kann man eine Klassifikation der Transformationen durchführen. Es scheiden sich sofort die eigentlichen von den uneigentlichen Transformationen.

Ist nämlich $|k_{ij}| = -1$, so unterscheidet man bekanntlich [3]) zwischen

---

[1]) Siehe etwa *A. Voß*, Über orthogonale Substitutionen, Annalen 13 (1878).

[2]) Siehe Anm. 1 auf S. 137. — [3]) Siehe Anm. 1 auf S. 136.

den ausgezeichneten Wurzeln $\sigma = \pm 1$ und den nicht ausgezeichneten Wurzelwerten. Die ersteren sind stets — eventuell in ungerader Vielfachheit — vorhanden und liefern invariante allgemeine Komplexe; die anderen Werte sind paarweis reziprok und liefern invariante Nullkomplexe. Je zwei Ruhekomplexe, die nicht zu reziproken Wurzeln gehören, sind zueinander orthogonal. Die invarianten Nullkomplexe gehören also dem Gebüsch an, in dem sich die durch die allgemeinen Komplexe bestimmten Gewebe schneiden. Sind alle Wurzeln $\sigma$ verschieden, so erhält man die Konfiguration, die *A. Loewy* [1]) durch Vermittlung der *Lie*schen Transformation aus der Liniengeometrie herleitet.

Ist dagegen $| k_{ij} | = +1$, so werden im allgemeinen durch drei Paar reziproker Wurzeln 6 invariante Nullkomplexe geliefert. Ihre Mittelsphären berühren sich zu je fünf.

In Ruhe bleiben auch die aus den invarianten Komplexen ableitbaren Komplexengebiete. Insbesondere kann man stets 6 invariante Komplexgewebe finden. Sie bilden — in der Terminologie *Schoutes* — ein invariantes Simplex, dessen Wände z. T. zusammenfallen können. Nach dessen Gestaltung ist die Aufzählung aller Transformationen möglich. Wir dürfen darauf verzichten, da die beiden Arbeiten von *Voß* in Annalen 10 und 13 die Charakteristiken der möglichen Fälle zu entnehmen gestatten.

Da die Wände des invarianten Simplex die Polaren der Ecken in bezug auf das quadratische Gewebe aller Nullkomplexe sind und die Koeffizienten der linearen Komplexgewebe kontragredient mit den Komplexkoordinaten transformiert werden, so multiplizieren sich die Polarformen je zweier Ruhekomplexe, die durch reziproke Wurzeln der charakteristischen Gleichung sich ergeben, mit reziproken Konstanten. *Daher sind auch alle homogenen Funktionen der Produkte aus den Polarformen je zweier solchen Ruhekomplexe Invarianten der Transformation.*

Die Spieglungen an sphärischen Komplexen haben die Charakteristik [(11111)1]. Nimmt man also den Hauptkomplex einer Spieglung und fünf paarweis orthogonale Komplexe des durch ihn bestimmten Gewebes zu Koordinatenkomplexen, so stellen *alle homogenen Funktionen* $\Phi(x_1^2, x_2^2, \ldots x_6^2)$ *Invarianten für die Spieglung an irgendeinem der Koordinatenkomplexe* dar. Daher sind auch die Brennflächen der Kongruenzen $\Phi = 0$, $\Omega - \Sigma x_i^2 = 0$ symmetrisch in bezug auf jeden der Koordinatenkomplexe.

Ist $\Phi$ eine Funktion $n$-ten Grades, so ist das Gebiet $\Phi = 0$, $\Omega = 0$ von $4n$-ter Ordnung. Jede *Dupin*sche Zyklide, die durch Sphären eines Koordinatenkomplexes erzeugt wird, enthält somit $4n$ Nullkomplexe des Gewebes $\Phi = 0$. Die Spieglung, die diesen Koordinatenkomplex in den Komplex aller Nullkugeln transformiert, verwandelt die in ihm enthaltenen *Dupin*schen Zykliden in Kreise bzw. Gerade. *Die Brennmäntel einer Kongruenz* $\Phi = 0, \Omega = 0$ *können daher durch Spieglung aus Flächen von der Ordnung* $4n$ *erhalten werden, die von jedem*

---

[1]) *A. Loewy*, Über d. Transf. einer quadrat. Form in sich selbst. Nova acta d. Deutschen Akad. d. Naturforscher 65 (1895).

*Kreis in 4n Punkten getroffen werden.* Für $\Phi = \Sigma k_i x_i^2$ ergeben sich mithin die Brennflächen durch Spieglung von Zykliden.

Die Mittelpunkte der doppeltberührenden Sphären des Hauptkomplexes der Spieglung erfüllen eine Fläche $M$. In der Umgebung jedes Punktes kann $M$ durch den Tangentialplan ersetzt werden. Die Sphären des Hauptkomplexes, deren Mittelpunkte jener Umgebung angehören, liegen daher in dem ebenen Gebüsch der Sphären, die zwei mit der Mittelsphäre des Hauptkomplexes kongruente und in bezug auf ihn symmetrische Sphären berühren. Die Mittelpunkte dieser Hilfssphären sind also invers bezüglich einer Kugel vom Radius des Hauptkomplexes. *Die Brennflächen sind daher Parallelflächen zu anallagmatischen Flächen.*

# Über den zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste im Körper $k_\zeta$ der $l$-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von $k_\zeta$.

Von *E. Artin* in Hamburg und *H. Hasse* in Kiel [1]).

In dieser Arbeit werden für den zweiten Ergänzungssatz zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz für die $l$-ten Potenzreste im Körper $k_\zeta$ der $l$-ten Einheitswurzeln analoge Überlegungen durchgeführt, wie in einer vorangehenden Arbeit von *H. Hasse* [2]) für das allgemeine Reziprozitätsgesetz selbst. Die Ergebnisse werden alsdann auf beliebige Oberkörper von $k_\zeta$ übertragen.

Sei $l$ eine ungerade Primzahl, $\zeta$ eine primitive $l$-te Einheitswurzel, $k_\zeta$ der durch $\zeta$ bestimmte Kreiskörper, $\lambda = 1 - \zeta$ und $\mathfrak{l} = (\lambda)$ der Primteiler von $l$ in $k_\zeta$. Der zweite Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste in $k_\zeta$ hat dann die Potenzrestsymbole $\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ und $\left(\frac{l}{a}\right)$ zu bestimmen, wo $a$ irgendeine zu $l$ prime Zahl aus $k_\zeta$ ist. Wegen

$$\left(\frac{\lambda}{a^{l-1}}\right) = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-1}; \qquad \left(\frac{l}{a^{l-1}}\right) = \left(\frac{l}{a}\right)^{-1}; \qquad a^{l-1} \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}$$

darf ohne Beschränkung $a \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}$ vorausgesetzt werden. Ist dann

$$a = (1-\lambda)^{c_1} \ldots (1-\lambda^l)^{c_l}\, a_0{}^l \ (\mathfrak{l}); \quad (c_i \bmod. l)$$

die Darstellung von $a$ durch das Fundamentalsystem $1 - \lambda^i$; $(i = 1, 2, \ldots, l)$ für die multiplikative Darstellung in $k_\zeta\,(\mathfrak{l})$, so gilt bekanntlich für das Potenzrestsymbol $\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ die Formel [3])

$$\left(\frac{\lambda}{a}\right) = \zeta^{c_l}. \tag{1.}$$

Hierin ist der Exponent $c_l$ als explizite Funktion von $a$ darzustellen. Diese Aufgabe läßt sich ähnlich wie in der vorstehenden Arbeit durch Einführung der Logarithmen für den Bereich von $\mathfrak{l}$ lösen und führt zu folgendem Ergebnis:

---

[1]) Die Ergebnisse dieser Arbeit sind im Sommer 1923 in einem Briefwechsel und mündlichen Besprechungen zwischen den beiden Verfassern entstanden. Ausarbeitung und Darstellung übernahm der jüngere von ihnen.

[2]) „Über das allgemeine Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste im Körper $k_\zeta$ der $l$-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von $k_\zeta$", ds. Journ. Bd. 154, S. 96 ff., im folgenden zitiert mit *R.*

[3]) Siehe schon bei *Eisenstein*, ds. Journ. Bd. 39, S. 357, (10.), außerdem *Takagi*, On the Law of Reciprocity in the Cyclotomic Corpus, S. 178, Proc. Phys.-math. Soc. Jap., Ser. 3, Vol. 4, 1922. (Vergl. *R.*, S. 97, Anm. 4.)

*Satz* 1. *Für beliebige zu* $l$ *prime* $a$ *aus* $k_\zeta$ *gilt*:

$$\left(\frac{\lambda}{a}\right) = \zeta^{s\left(\frac{\zeta \log a^{l-1}}{l\lambda}\right)},$$

*speziell für* $a \equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{l}$:

$$\left(\frac{\lambda}{a}\right) = \zeta^{-s\left(\frac{\zeta \log a}{l\lambda}\right)}.$$ [1])

In ähnlicher Weise soll auch die Formel für $\left(\frac{l}{a}\right)$ entwickelt werden. Der Wert dieses Symbols ist, wenn $a \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}$ durch die *Takagi*sche Basis [2]) $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ in der Form

$$a = \varkappa_1^{e_1} \ldots \varkappa_t^{e_t}\, a_0^l \quad (\mathfrak{l}); \qquad (e_i \bmod l)$$

dargestellt ist:

$$\left(\frac{l}{a}\right) = \zeta^{-e_t}\ ^{3}). \tag{2}$$

Hier wird sich ergeben:

*Satz* 2. *Für beliebige zu* $l$ *prime* $a$ *aus* $k_\zeta$ *gilt*:

$$\left(\frac{l}{a}\right) = \zeta^{s\left(\frac{\log a^{l-1}}{\lambda^l}\right)},$$

*speziell für* $a \equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{l}$:

$$\left(\frac{l}{a}\right) = \zeta^{-s\left(\frac{\log a}{\lambda^l}\right)}.$$

Beide Sätze lassen sich dann in folgender Form auf beliebige Oberkörper $k$ von $k_\zeta$ übertragen:

*Satz* 3. *Für beliebige* $A \equiv$ *zu* $l$ *primer, rationaler Zahl mod.* $\mathfrak{l}$ [4]) *aus* $K$ *gilt*:

$$\left(\frac{\lambda}{A}\right) = \zeta^{s\left(\frac{\zeta \log A^{l-1}}{l\lambda}\right)}; \qquad \left(\frac{l}{A}\right) = \zeta^{s\left(\frac{\log A^{l-1}}{\lambda^l}\right)},$$

*speziell für* $A \equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{l}$:

$$\left(\frac{\lambda}{A}\right) = \zeta^{-s\left(\frac{\zeta \log A}{l\lambda}\right)}; \qquad \left(\frac{l}{A}\right) = \zeta^{-s\left(\frac{\log A}{\lambda^l}\right)}.$$

Es sei hervorgehoben, daß Satz 1 und 2 zwar die feinstmögliche Formulierung des zweiten Ergänzungssatzes in $k_\zeta$ darstellen, Satz 3 hingegen noch nicht der allgemeinste Ergänzungssatz in $K$ ist, weil ja in $K$ der Primteiler $\mathfrak{l}$ von $k_\zeta$ noch weiter zerfallen kann, und dann noch die Potenzrestsymbole auszudrücken bleiben, deren Zähler einen Primfaktor von $\mathfrak{l}$ nur einmal enthält. Auch muß dann die Kongruenzbedingung mod. $\mathfrak{l}$ für $A$ noch durch eine weniger einschränkende ersetzt werden.

Für die Beweise von Satz 1 — 3 genügt es auf Grund obiger Bemerkung natürlich, sich auf die speziellen Fälle $a$ bzw. $A \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}$ zu beschränken.

---

[1]) Siehe Anm. 1 S. 105 in *R*.

[2]) Siehe *Takagi*, a. a. O., S. 174, außerdem *R*., S. 97 u.

[3]) Siehe *Takagi*, a. a. O., S. 179.

[4]) $\mathfrak{l}$ bezeichnet nach wie vor den Primteiler $\mathfrak{l} = (\lambda) = (1 - \zeta)$ von $k_\zeta$, dagegen $S$ jetzt die Spur in $K$.

## Beweis von Satz 1.

Sei irgendein $a \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}$ aus $k_\zeta$ gegeben und

$$a = (1-\lambda)^{c_1} \cdots (1-\lambda^l)^{c_l} a_0^{\,l} \quad (\mathfrak{l}); \quad (c_i \bmod. l)$$

seine Darstellung durch das Fundamentalsystem $(1-\lambda^i)$; $(i = 1, 2, \ldots, l)$ von $k_\zeta(\mathfrak{l})$. Um $c_l$ durch $a$ auszudrücken, bilden wir

$$\log a = \sum_{n=1}^{l} c_n \log(1-\lambda^n) + l \log a_0 \equiv \sum_{n=1}^{l-1} c_n \log(1-\lambda^n) \bmod. \mathfrak{l}^{l+1},$$

weil $\log a_0$, wie jeder Logarithmus einer Einseinheit von $k_\zeta(\mathfrak{l})$, durch $\mathfrak{l}^2$ teilbar ist. Durch Entwicklung der Logarithmen rechts folgt unter Anwendung des Hilfssatzes 1 aus *R.*:

$$\log a \equiv -\sum_{n=1}^{l} c_n \sum_{\nu=1}^{l-1} \frac{\lambda^{n\nu}}{\nu} - c_1 \frac{\lambda^l}{l} \bmod. \mathfrak{l}^{l+1}.$$

Um eine Entwicklung nach Potenzen von $\lambda$ mit für den Bereich von $l$ *ganzen* rationalen Koeffizienten zu erhalten, führen wir für das einzige noch nicht so beschaffene Glied $\frac{\lambda^l}{l}$ die Entwicklung

$$-\frac{\lambda^l}{l} \equiv \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2} + \cdots + \frac{\lambda^{l-1}}{l-1} \bmod. \mathfrak{l}^{l+1}$$

ein, die sich mittels des angegebenen Hilfssatzes unmittelbar aus der Relation

$$0 = \log \zeta = \log(1-\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu} \quad (\mathfrak{l})$$

ergibt. Dann wird

$$\log a \equiv -\sum_{n=1}^{l} c_n \sum_{\nu=1}^{l-1} \frac{\lambda^{n\nu}}{\nu} + c_1 \sum_{\nu=1}^{l-1} \frac{\lambda^\nu}{\nu} \equiv -\sum_{n=2}^{l} c_n \sum_{\nu=1}^{l-1} \frac{\lambda^{n\nu}}{\nu} \bmod. \mathfrak{l}^{l+1},$$

und das liefert eine Entwicklung der Form:

$$\log a \equiv b_2 \lambda^2 + \cdots + b_l \lambda^l \bmod. \mathfrak{l}^{l+1}$$

mit für den Bereich von $l$ ganzen rationalen $b_i$, in der speziell

$$b_l = -c_l$$

ist. Der Koeffizient $b_l = -c_l$ dieser Entwicklung läßt sich nun durch Spurbildung bestimmen. Aus den Gleichungen

$$S(\lambda^i) = \sum_{\nu=0}^{l-1} (1-\zeta^\nu)^i = \sum_{\nu=0}^{l-1} \sum_{\mu=0}^{i} (-1)^\mu \binom{i}{\mu} \zeta^{\nu\mu} = \sum_{\mu=0}^{i} (-1)^\mu \binom{i}{\mu} \sum_{\nu=0}^{l-1} \zeta^{\nu\mu} = l; \qquad (1 \leqq i \leqq l-1)$$

$$S(\lambda^l) = \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \binom{l}{\mu} \sum_{\nu=0}^{l-1} \zeta^{\nu\mu} = l - l = 0$$

folgt nämlich:

$$S(\log a) \equiv l(b_2 + \cdots + b_{l-1}) \bmod. \mathfrak{l}^{l+1}, \text{ also } \bmod. l^2$$

$$S\left(\frac{\log a}{\lambda}\right) \equiv l(b_2 + \cdots + b_{l-1} + b_l) \bmod. \mathfrak{l}^l, \text{ also } \bmod. l^2$$

und somit durch Subtraktion und Division durch $l$:

$$\frac{1}{l} S\left(\frac{\log a}{\lambda} - \log a\right) = \frac{1}{l} S\left(\frac{\zeta \log a}{\lambda}\right) \equiv b_l \equiv -c_l \bmod. l.$$

Damit ist nach (1.) Satz 1 bewiesen.

## Beweis von Satz 2.

Um $\left(\frac{l}{a}\right)$ auszudrücken, gehen wir nicht von dem *Takagi*schen Ergebnis (2.) aus, sondern transformieren unser in Satz 1 erhaltenes Resultat für $\left(\frac{\lambda}{a}\right)$. Hierzu zerlegen wir

$$l = (1-\zeta)(1-\zeta^2)\dots(1-\zeta^{l-1}) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{l-1};\ (\lambda_1 = \lambda).$$

Dann wird für $a \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$

$$\left(\frac{l}{a}\right) = \prod_{\mu=1}^{l-1}\left(\frac{\lambda_\mu}{a}\right) = \zeta^{-\sum_{\mu=1}^{l-1} s\left(\frac{\zeta^\mu \log a}{l\lambda_\mu}\right)} = \zeta^{-\frac{s\left(\log a \cdot \sum_{\mu=1}^{l-1}\frac{\mu\zeta^\mu}{1-\zeta^\mu}\right)}{l}},$$

weil natürlich Satz 1 auch gilt, wenn $\zeta$ durch $\zeta^\mu$ und $\lambda$ durch $\lambda_\mu$ ersetzt wird. Wegen $\log a \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}^2$ ist also nur noch

$$z = \sum_{\mu=1}^{l-1}\frac{\mu\zeta^\mu}{1-\zeta^\mu}$$

nach dem Modul $\mathfrak{l}^{l-2}$ auszurechnen, da hierdurch die Spur mod. $\mathfrak{l}^l$, also mod. $l^2$ bestimmt ist, und um Satz 2 zu beweisen, muß

$$z \equiv \frac{l}{\lambda^l} \bmod \mathfrak{l}^{l-2}$$

nachgewiesen werden.

Nun ist

$$z = -\zeta\frac{d}{dx}\left[\log\prod_{\mu=1}^{l-1}(1-x^\mu)\right]_{x=\zeta} = \zeta\frac{d}{dx}\left[\log\frac{(1-x)^{l-1}}{\prod_{\mu=1}^{l-1}(1-x^\mu)} - (l-1)\log(1-x)\right]_{x=\zeta}$$

$$= \zeta\frac{d}{dx}\left[\log\varepsilon(x)\right]_{x=\zeta} + (l-1)\frac{\zeta}{1-\zeta}$$

$$\equiv \zeta\frac{d}{dx}\left[\log\varepsilon(x)\right]_{x=\zeta} - \frac{\zeta}{\lambda} \bmod \mathfrak{l}^{l-2},$$

wobei die rationale Funktion $\varepsilon(x)$ aus der Einheit

$$\varepsilon = \frac{(1-\zeta)^{l-1}}{(1-\zeta)\dots(1-\zeta^{l-1})} = \frac{\lambda^{l-1}}{\lambda_1\dots\lambda_{l-1}} = \frac{\lambda^{l-1}}{l}$$

von $k_\zeta$ entsteht, wenn in der ersten Darstellung $\zeta$ durch die Variable $x$ ersetzt wird.

Die Funktion

$$\frac{1}{\varepsilon(x)} = \frac{\prod_{\mu=1}^{l-1}(1-x^\mu)}{(1-x)^{l-1}} = g(x)$$

ist eine ganze rationale Funktion von $x$, deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind, in denen keine Potenz von $l$ als gemeinsamer Teiler aufgeht, da ja $\frac{1}{\varepsilon(\zeta)} = g(\zeta)$ eine Einheit von $k_\zeta$ ist. $g(x)$ ist ferner prim zu der irreduziblen Funktion

$$f(x) = x^{l-1} + \dots + x + 1 = \frac{x^l - 1}{x-1},$$

weil sonst $g(\zeta) = 0$ wäre. Ist nun $\varepsilon_1(x)$ irgendeine *ganze* rationale Funktion von $x$

mit für den Bereich von $l$ ganzen Koeffizienten, für die

$$\varepsilon_1(\zeta) = \varepsilon(\zeta) = \varepsilon$$

ist, so ist bekanntlich

$$\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x) + \varphi(x)\, f(x) = \frac{1}{g(x)} + \varphi(x)\, f(x)$$

mit einer rationalen, mod. $f(x)$ ganzen Funktion $\varphi(x)$, die wegen der Ganzheit von $\varepsilon_1(x)$ in der Form

$$\varphi(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

mit ganz-rationalem $h(x)$ geschrieben werden kann. Es ist also dann

$$\varepsilon_1(x)\, g(x) = 1 + h(x)\, f(x),$$

und da $\varepsilon_1(x)\, g(x)$ nach Annahme für den Bereich von $l$ ganze Koeffizienten hat, muß dasselbe nach dem *Gauß*schen Satze auch für $h(x)$ gelten, so daß $h(\zeta)$ eine für den Bereich von $\mathfrak{l}$ ganze Zahl von $k_\zeta$ wird.

Durch Differentiation folgt dann aus

$$\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x) + \frac{h(x)}{g(x)}\, f(x):$$

$$\varepsilon_1'(x) = \varepsilon'(x) + \frac{h(x)}{g(x)}\, f'(x) + \frac{h'(x)\, g(x) - h(x)\, g'(x)}{g^2(x)}\, f(x),$$

also

$$\varepsilon_1'(\zeta) = \varepsilon'(\zeta) + \frac{h(\zeta)}{g(\zeta)}\, f'(\zeta) = \varepsilon'(\zeta) + \gamma \cdot \frac{l\zeta^{-1}}{\zeta - 1},$$

wo $\gamma = \dfrac{h(\zeta)}{g(\zeta)} = \varepsilon h(\zeta)$ eine für den Bereich von $\mathfrak{l}$ ganze Zahl von $k_\zeta$ ist. Somit wird

$$\varepsilon_1'(\zeta) \equiv \varepsilon'(\zeta) \mod \mathfrak{l}^{l-2},$$

und daher

$$\frac{d}{dx}\Big[\log \varepsilon_1(x)\Big]_{x=\zeta} = \frac{\varepsilon_1'(\zeta)}{\varepsilon} \equiv \frac{\varepsilon'(\zeta)}{\varepsilon} = \frac{d}{dx}\Big[\log \varepsilon(x)\Big]_{x=\zeta} \mod \mathfrak{l}^{l-2}.$$

Zur Bestimmung der rechten Seite dieser Kongruenz mod. $\mathfrak{l}^{l-2}$ dürfen wir also die Darstellung $\varepsilon = \varepsilon(\zeta)$ durch irgendeine andere $\varepsilon = \varepsilon_1(\zeta)$ mit den oben genannten Eigenschaften ersetzen. Eine solche entspringt nun aus der a. S. 145 benutzten Kongruenz

$$\varepsilon = \frac{\lambda^{l-1}}{l} \equiv -1 - \frac{\lambda}{2} - \cdots - \frac{\lambda^{l-2}}{l-1} \mod \mathfrak{l}^l.$$

Denn hiernach ist

$$\varepsilon = -1 - \frac{\lambda}{2} - \ldots - \frac{\lambda^{l-2}}{l-1} + l\gamma,$$

wo $\gamma = \gamma(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{l-2}\zeta^{l-2}$ eine für den Bereich von $\mathfrak{l}$ ganze Zahl von $k_\zeta$ ist, also $a_0, \ldots, a_{l-2}$ für den Bereich von $l$ ganze rationale Zahlen sind, sodaß

$$\varepsilon_1(x) = -1 - \frac{1-x}{2} - \cdots - \frac{(1-x)^{l-2}}{l-1} + l\gamma(x)$$

eine ganze rationale Funktion von $x$ mit für den Bereich von $l$ ganzen rationalen Koeffizienten ist, für die $\varepsilon_1(\zeta) = \varepsilon$ ist. Daher folgt nach obigem

$$\frac{d}{dx}\Big[\log \varepsilon(x)\Big]_{x=\zeta} \equiv \frac{\varepsilon_1'(\zeta)}{\varepsilon} \equiv \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{2}+\frac{2\lambda}{3}+\cdots+\frac{(l-2)\lambda^{l-3}}{l-1}+l\gamma'(\zeta)\Big) \bmod \mathfrak{l}^{l-2}$$

$$\equiv \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{2}+\frac{2\lambda}{3}+\cdots+\frac{(l-2)\lambda^{l-3}}{l-1}\Big) \bmod \mathfrak{l}^{l-2}.$$

Damit wird

$$z \equiv \frac{\zeta}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{2}+\frac{2\lambda}{3}+\cdots+\frac{(l-2)\lambda^{l-3}}{l-1}\Big)-\frac{\zeta}{\lambda} \bmod \mathfrak{l}^{l-2}$$

$$\equiv \frac{\zeta}{\varepsilon}\Big(-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{3}-\cdots-\frac{\lambda^{l-3}}{l-1}+1+\lambda+\cdots+\lambda^{l-3}\Big)-\frac{\zeta}{\lambda} \bmod \mathfrak{l}^{l-2}$$

$$\equiv \frac{\zeta}{\varepsilon}\Big(\frac{\varepsilon+1}{\lambda}+\frac{1-\lambda^{l-2}}{\zeta}\Big)-\frac{\zeta}{\lambda} \equiv \frac{\zeta}{\varepsilon\lambda}+\frac{1}{\varepsilon} \equiv \frac{1}{\varepsilon\lambda} \equiv \frac{l}{\lambda^l} \bmod \mathfrak{l}^{l-2}, \text{ w. z. b. w.}$$

## Beweis von Satz 3.

Dieser Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Teile a) des Hilfssatzes 2 aus *R*. Bezeichne

$S$ die Spur in $k_\zeta$
$\bar{S}$ „ „ „ $K$
$s$ „ Relativspur von $K$ nach $k_\zeta$
$n$ „ Relativnorm „ „ „ „

und wie bisher $\mathfrak{l} = (\lambda) = (1-\zeta)$ den Primteiler von $l$ in $k_\zeta$. Dann ist für ein $A \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$ aus $K$ stets $n(A) \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$ und nach jenem Hilfssatz

$$\Big(\frac{\lambda}{A}\Big)_K = \Big(\frac{\lambda}{n(A)}\Big)_{k_\zeta} = \zeta^{-S\left(\frac{\zeta \log n(A)}{l\lambda}\right)} = \zeta^{-S\left(\frac{\zeta s(\log A)}{l\lambda}\right)} = \zeta^{-Ss\left(\frac{\zeta \log A}{l\lambda}\right)} = \zeta^{-\bar{S}\left(\frac{\zeta \log A}{l\lambda}\right)}$$

und ebenso

$$\Big(\frac{l}{A}\Big)_K = \Big(\frac{l}{n(A)}\Big)_{k_\zeta} = \zeta^{-S\left(\frac{\log n(A)}{\lambda^l}\right)} = \zeta^{-\bar{S}\left(\frac{\log A}{\lambda^l}\right)},$$

weil, wie in *R*. a. S. 109 gezeigt wurde,

$$\log n(A) = s(\log A) \quad (\mathfrak{l})$$

gilt.

# Ein neuer Zusammenhang zwischen den Trigonometrien der beiden nichteuklidischen Ebenen.

Von *E. Roeser* in Bottrop.

In der hyperbolischen und der sphärisch-elliptischen Geometrie unterscheidet sich die Winkelsumme des Dreiecks um einen gewissen von der Größe der Seiten abhängigen Betrag $\pm \varepsilon$. Kann man diese gemeinsame Eigenschaft benützen, um eine Beziehung zwischen den Formelsystem beider Figuren herzustellen?

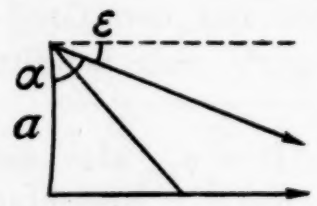



Fig. 1.

Fig. 2.

Man denke sich in den beiden Ebenen zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten $a$ und $a_1$. Dreht man die Hypotenuse bis in die in den Figuren angedeutete Grenzlage, so entsteht erstens ein Dreieck mit einer unendlich fernen Ecke und dem Winkel 0, zweitens ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln. $a$ und $a_1$ seien so bestimmt, daß die beiden Dreiecke in ihrer Winkelsumme dieselbe Abweichung $\varepsilon$ von $\pi$ zeigen.

Nach der bekannten Beziehung zwischen Lot und Parallelwinkel ist, da $a + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$:

1. $$\sin a = \cos \varepsilon = \frac{1}{\operatorname{ch} a}.$$

Im zweiten aber ist einfach $a_1 = \varepsilon$.

2. $$\cos \varepsilon = \cos a_1.$$

Da in beiden Geometrien $\varepsilon$ dieselbe Bedeutung zukommt, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, so werden die Dreiecksformeln ineinander übergehen, wenn man in den sphärischen Formeln $\cos a_1$ ersetzt durch $\frac{1}{\operatorname{ch} a}$. Dabei ist allerdings noch die Lage von $\varepsilon$ in den beiden Dreiecken in Betracht zu ziehen. $\varepsilon$ ist im zweiten Dreieck der $a$ gegenüberliegende Winkel, im ersten der Winkel, dessen Komplementwinkel $a$ anliegt. Daher ist in den Formeln noch $\cos \mu$ durch $\sin \lambda$ usw. zu ersetzen, wenn $\mu$ und $\lambda$ die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind, die den Seiten $b$ und $a$ gegenüberliegen. Es ist also zu ersetzen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\cos a_1$ | durch | $\frac{1}{\operatorname{ch} a}$ | also: |
| 3. | $\operatorname{tg} a_1$ | „ | $\operatorname{sh} a$ | |
| | $\sin a_1$ | „ | $\operatorname{th} a$. | |

Dann geht über: [Indices fortgelassen]

$$\sin\lambda = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} \text{ in } \cos\mu = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$$

4. $$\cos\lambda = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c} \text{ „ } \sin\mu = \frac{\sin b}{\sin c}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b} \text{ „ } \cot\mu = \frac{\sin a}{\operatorname{tg} b}$$

$$\cos\lambda = \operatorname{ch} a \cdot \sin\mu \text{ in } \sin\mu = \frac{\cos\lambda \cdot}{\cos a}$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b \text{ „ } \cos c = \cos a \cos b$$

$$\operatorname{ch} c = \cot\mu \cdot \cot\lambda \text{ „ } \cos c = \cot\lambda \cdot \cot\mu.$$

Aus 1 und 2 folgt:

5. $$\cos a_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} a}.$$

Die zur sphärischen Strecke $a_1$ gehörende hyperbolische $a$ läßt sich konstruieren.

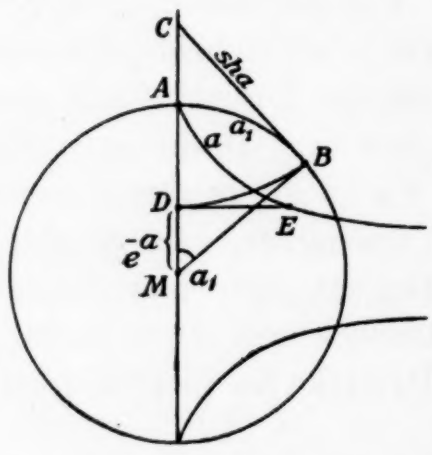


Fig. 3.

Man bringe eine Kugel mit dem Radius 1 und eine Pseudosphäre, deren Kantenkreis mit dem Großkreis der Kugel zusammenfällt (Figur!) zum Schnitt mit der euklidischen Ebene.

Auf der Kugel gemessen ist $AB = a_1$, also die Projektion von $B$ auf $MA$ gleich $\cos a_1$. Errichtet man in der euklidischen Ebene in $B$ das Lot auf $MB$, so ist $MC$ nach Gleichung 5. gleich $\operatorname{ch} a$, also $CB = \operatorname{sh} a$ und $MD$ gleich $\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a = e^{-a}$. Das Lot auf $MA$ im Punkte $D$ trifft die geodätische Linie der Pseudosphäre im Punkte $E$. Dann ist die pseudosphärische oder hyperbolische Strecke $AE = a$.

# Das rechtwinklige Fünfeck der hyperbolischen Ebene und die *Engel-Napier*sche Regel.

Von *E. Roeser* in Bottrop.

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten $a, b, c$ und den Winkeln $\lambda$ und $\mu$, ferner ein Spitzeck, das mit ihm in den Stücken $a$ und $b$ übereinstimmt (Figur). Man kann sich dann das Spitzeck so entstanden denken, daß die Seite $c$ sich beständig um die Ecke $\lambda$ dreht, bis $\lambda$ in $\lambda_1$ übergeht und $a$ und $c_1$ die gemeinsame Senkrechte $d_1$ haben, deren Funktionen nun in den Formeln an die Stelle der Funktionen von $\mu$ treten. In welcher Weise, zeigt die Gegenüberstellung einiger Gleichungen.

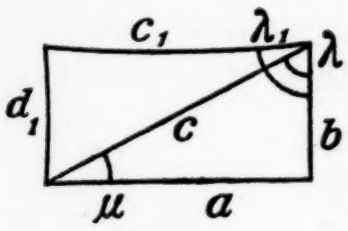


Fig. 1.

| Dreieck. | Spitzeck. |
|---|---|
| 1. $\cos\lambda = \dfrac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}$ | 1. $\cos\lambda_1 = \operatorname{th} b \cdot \operatorname{th} c_1$ |
| 2. $\cos\mu = \operatorname{ch} b \cdot \sin\lambda$ | 2. $\operatorname{ch} d_1 = \operatorname{ch} b \cdot \sin\lambda_1$. |

Hieraus folgt, daß auch diejenigen Seiten, die bei der Drehung von $c$ unendlich lang werden, um dann wieder abzunehmen, ihre Funktionen ändern; diese Seiten sind $a$ und $c$. Unverändert bleiben nur die Funktionen von $b$ und $\lambda$.

Es ist zu ersetzen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\operatorname{th} c$ | durch | $\dfrac{1}{\operatorname{th} c_1}$ folglich: |
| 3. | $\operatorname{ch} c$ | „ | $\pm i \operatorname{sh} c_1$ und |
| | $\operatorname{sh} c$ | „ | $\pm i \operatorname{ch} c_1$. |

Und die andere Gruppe, die sich aus 2. ergibt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\cos\mu$ | durch | $\operatorname{ch} d_1$ |
| 4. | $\sin\mu$ | „ | $\pm i \operatorname{sh} d_1$ |
| | $\operatorname{tg}\mu$ | „ | $\pm i \operatorname{th} d_1$. |

In der Tat gehen dann alle Gleichungen des Dreiecks in die des Spitzecks über. Das Imaginäre hebt sich stets heraus.

Es soll jetzt der Winkel $\lambda$ auf dieselbe Weise behandelt werden wie $\mu$; die Senkrechte, die $\lambda$ ersetzt, heiße $e_1$. Dann wird aus dem Spitzeck ein Fünfeck mit 5 rechten Winkeln. Man kann vom Dreieck direkt zum Fünfeck kommen, wenn man bedenkt, daß jede Seite, deren Funktion zweimal verändert werden muß, wie $c$, wieder die ursprüngliche Funktion annimmt, denn eine zweimalige Um-

änderung 3. ergibt das Ursprüngliche. Die Seiten $a$ und $b$ dagegen stoßen an den rechten Winkel und werden einmal verändert. Ebenso die Winkel $\mu$ und $\lambda$. [Striche fortgelassen]

So folgt:

| Dreieck | geht über in | Fünfeck: |
|---|---|---|
| 1. $\sin\lambda = \frac{\mathrm{sh}\,a}{\mathrm{sh}\,c}$ | „ | 1. $\mathrm{sh}\,e = \frac{\mathrm{ch}\,a}{\mathrm{sh}\,c}$ |
| 2. $\mathrm{tg}\,\lambda = \frac{\mathrm{th}\,a}{\mathrm{sh}\,b}$ | „ | 2. $\mathrm{th}\,e = \frac{1}{\mathrm{th}\,a \cdot \mathrm{ch}\,b}$ |
| 3. $\mathrm{ch}\,c = \cot\mu\cot\lambda$ | „ | 3. $\mathrm{ch}\,e = \mathrm{cth}\,e \cdot \mathrm{cth}\,d$ |
| 4. $\mathrm{ch}\,c = \mathrm{ch}\,a \cdot \mathrm{ch}\,b$ | „ | 4. $\mathrm{ch}\,c = \mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{sh}\,b$ |
| 5. $\cos\mu = \mathrm{ch}\,b \cdot \sin\lambda$ | „ | 5. $\mathrm{ch}\,d = \mathrm{sh}\,b \cdot \mathrm{sh}\,e$ |
| 6. $\cos\lambda = \mathrm{ch}\,a \sin\mu$ | „ | 6. $\mathrm{ch}\,e = \mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{sh}\,d$ |
| 7. $\cos\mu = \frac{\mathrm{th}\,a}{\mathrm{th}\,c}$ | „ | 7. $\mathrm{ch}\,e = \mathrm{cth}\,b \cdot \mathrm{cth}\,c$ |
| 8. $\cos\lambda = \frac{\mathrm{th}\,b}{\mathrm{th}\,c}$ | „ | 8. $\mathrm{ch}\,d = \mathrm{cth}\,a \cdot \mathrm{cth}\,c$ |
| 9. $\sin\mu = \frac{\mathrm{sh}\,b}{\mathrm{sh}\,c}$ | „ | 9. $\mathrm{sh}\,d = \frac{\mathrm{ch}\,b}{\mathrm{sh}\,c}$ |
| 10. $\mathrm{tg}\,\mu = \frac{\mathrm{th}\,b}{\mathrm{sh}\,a}$ | „ | 10. $\mathrm{th}\,d = \frac{\mathrm{cth}\,b}{\mathrm{ch}\,a}$. |

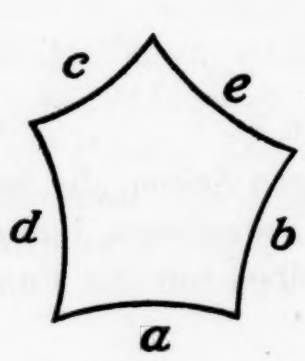



Fig. 2.

Also gilt der Satz:

Im rechtwinkligen Fünfeck ist der hyperbolische Kosinus einer Seite gleich dem Produkt der Cotangenten der anliegenden und gleich dem Produkt des Sinus der getrennt liegenden Seiten.

Das ist aber dieselbe Beziehung wie bei der *Neper*schen Regel, bloß daß die Stücke hier tatsächlich in einer Figur vereinigt sind.

Läßt man alle Seiten gleich $a$ werden, so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$\mathrm{ch}\,a = \mathrm{cth}^2 a$ und

$\mathrm{ch}\,a = \mathrm{sh}^2 a$, die aber identisch werden, wenn man die erste durch $\mathrm{ch}^2 a$ dividiert.

Für $a$ ergibt sich natürlich dieselbe Größe, die man auch aus dem regulären, dem Kreis einbeschriebenen Fünfeck mit rechten Winkeln erhält.

Geht man statt vom rechtwinkligen Dreieck vom schiefwinkligen aus, indem

man wieder sozusagen die Ecken abschneidet, so folgen Beziehungen für das rechtwinklige Sechseck. Sind $a, b, c$ die Seiten $\lambda, \mu, \nu$ die Winkel, aus denen die Lote $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ werden, so folgt aus dem Sinussatz z. B.:

$$\operatorname{sh} a : \operatorname{sh} b : \operatorname{sh} c = \operatorname{sh} \bar{\lambda} : \operatorname{sh} \bar{\mu} : \operatorname{sh} \bar{\nu} .$$

Nach Abschluß dieses Aufsatzes erhielt ich Kenntnis von einer Arbeit des Herrn *S. Mukhopadyaya* aus Calcutta, Bulletin Calcutta Mathematical Society, Vol. XIII, No. 4, 1923, wo die komplementären rechtwinkligen Fünfecke aufgestellt werden. Die Betrachtungsweise ist rein geometrisch. Inzwischen sind die Gleichungen des Fünfecks, nebst einem Satz, der sie in Beziehung setzt zum zugeordneten Dreieck, noch auf anderem Wege unter Vermeidung des Imaginären vom Verfasser abgeleitet worden. Es ergibt sich der Satz:

Jede Seite eines rechtwinkligen Fünfecks ist zugleich Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die komplementären Strecken der anliegenden Fünfecksseiten und dessen Winkel die Parallelwinkel der gegenüberliegenden Fünfecksseiten sind. Daraus folgt sofort die Kette der zugeordneten Dreiecke.

# Über Reihenentwicklung analytischer Funktionen.

Von *R. König* und *M. Krafft* in Münster i. W.

---

Die *Taylor*entwicklung einer in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{d}$ regulären analytischen Funktion $f(z)$ entspringt durch Verknüpfung der Integraldarstellung der Funktion mit der Entwicklung von $\frac{1}{z-x}$ nach Potenzen von $t = z - d$. Wählt man statt $z - d$ eine allgemeine Ortsuniformisierende $t$ der Stelle $\mathfrak{d}$, so erhält man eine neue Entwicklung. Diese gilt im Innern $\mathfrak{B}$ einer Niveaukurve der durch $t = t(z)$ vermittelten konformen Abbildung. Daneben tritt für die im Komplementärgebiet $\bar{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen eine zweite Entwicklung, die nach rationalen Funktionen fortschreitet. Von Herrn *Faber* ist der Gegenstand in mehreren Arbeiten [1]) behandelt und seitdem in die Literatur [2]) übergegangen. Der Zusammenhang zwischen beiden Entwicklungen wurde von dem einen von uns in seiner Dissertation [3]) festgestellt.

Geht man mit der Absicht einer systematischen Begründung der Funktionentheorie an den Gegenstand heran, so kommt man zu folgenden Ergebnissen: In der Klasse der rationalen Funktionen zeichnen sich als einfachste die sog. Elementarfunktionen (§ 2) aus, denen völlig gleichberechtigt dual die Elementardifferentiale (§ 3) zur Seite treten.

In die Definition beider geht die zur Polstelle gehörige Ortsuniformisierende wesentlich ein. Wird diese Uniformisierende geändert, so werden die neuen Elementarfunktionen und Elementardifferentiale lineare Kombinationen der alten (§ 2, (8), (8′), § 3, (15)).

Die wichtigste Bildung der Theorie ist (§ 4) die Elementarfunktion $E(z, x)$ von zwei Veränderlichen (dem Argument $z$ und dem Parameter $x$), neben die dual gleichberechtigt das Elementardifferential $d\,F(x, z)$ von zwei Veränderlichen tritt. Für diese gelten dann die beiden Entwicklungssätze (*E Th* bzw. $\widetilde{E\ Th}$), die Verallgemeinerungen der geometrischen Reihe für $\frac{1}{z-x}$. Die Gültigkeit der Entwick-

---

[1]) *G. Faber*, Über Reihenentwicklungen analytischer Funktionen, Dissertation, München 1903. Über polynomische Entwicklungen, Mathem. Ann. 57 (1903) (3. Abschnitt der Diss.), Verallgemeinerungen in späteren Arbeiten.

[2]) *Montel,* Leçons sur les séries des polynomes à une variable complexe, Paris 1910.

[3]) *M. Krafft*, Zur Theorie der Faberschen Polynome und ihrer zugeordneten Funktionen, Marburg 1915, Seite 41, Satz VIII.

lungssätze für beliebige Entwicklungsstellen und allgemeine Ortsuniformisierende wird in § 5 betrachtet.

Es sei nun $f(z)$ wie oben eine in $\mathfrak{B}$ reguläre analytische Funktion (die also auch „klassenfremd", d. h. hier: nichtrational, sein kann). Durch Verknüpfung des $\widetilde{E\,Th}$ mit der Integraldarstellung (§ 6) entspringt hieraus eine nach Potenzen der Ortsuniformisierenden fortschreitende in $\mathfrak{B}$ gültige Reihe (I.) für $f(z)$. Eine ebensolche Reihe ($\breve{\text{I}}$) ergibt sich für die in $\mathfrak{B}$ regulären Differentiale $g(x)dx$.

Für in $\overline{\mathfrak{B}}$ reguläre Funktionen und Differentiale ergibt sich analog eine nach Klassenfunktionen bzw. Klassendifferentialen fortschreitende Reihe (II) bzw. ($\breve{\text{II}}$). Unter (II) sind speziell die *Faber*schen Polynomreihen enthalten, die *Taylor*reihe ist Spezialfall sowohl von (I) wie von (II).

In § 8 wird gezeigt, wie sich die Reihen (I) zur Summation divergenter Reihen verwenden lassen. Es ordnen sich hier Entwicklungen von *Perron* [1]) naturgemäß ein.

Die duale Gegenüberstellung von Funktionen und Differentialen wird von größerer Bedeutung, wenn man von den rationalen Funktionen zu Klassen algebraischer oder noch allgemeinerer Funktionen aufsteigt [2]). Dort steht jedem Satz über Funktionen ein solcher über Differentiale, aber nicht derselben sondern der sogen. komplementären Klasse, gegenüber. Die Ausdehnung hierauf bleibt späteren Arbeiten vorbehalten.

## § 1. Bezeichnungen.

Im folgenden bezeichne stets $z$ die Variable, $t$ die Ortsuniformisierende der betrachteten Stelle. Kommen zwei Variable vor, so heiße die zweite $x$, die zugehörige Uniformisierende $\tau$.

Verschiedene zur *gleichen* Stelle gehörige Ortsuniformisierende mögen mit $t, t^*, t^{**}, \ldots$ bezeichnet werden, zu verschiedenen Stellen gehörige Uniformisierende erhalten untere Indizes. Beschränken wir $z$ auf die Umgebung einer Stelle $\mathfrak{d}$, betrachten wir also nur Funktionselemente mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{d}$, so schreiben wir $z_\mathfrak{d}$ statt $z$ [3]).

Für die schlichte Vollkugel ist die einfachste Ortsuniformisierende einer endlichen Stelle $\mathfrak{d}$ bzw. der unendlich fernen Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ gegeben durch

$$(1)\qquad \begin{aligned} z - d &= t && \text{bei } \mathfrak{d},\\ \frac{1}{z} &= t && \text{bei } \mathfrak{p}_\infty. \end{aligned}$$

Diese Uniformisierende wollen wir die „gewöhnliche" nennen. Die allgemeinste Uniformisierende ist, wenn $\mathfrak{P}(t)$ eine Potenzreihe bedeutet, für die $\mathfrak{P}(0) \neq 0$ ist, gegeben durch

$$(2)\qquad \begin{aligned} z - d &= t \cdot \mathfrak{P}(t) && \text{bei } \mathfrak{d},\\ \frac{1}{z} &= t \cdot \mathfrak{P}(t) && \text{bei } \mathfrak{p}_\infty. \end{aligned}$$

---

[1]) *O. Perron*: Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation, Mathem. Zeitschrift 18 (1913) §§ 2—4.

[2]) *R. König*: Die Reduktions- und Reziprozitätstheoreme bei den Riemannschen Transzendenten. Math. Annalen 79 (1918) und die dort angegebene Literatur.

[3]) Abweichend von der bei *R. König* a. a. O. gebrauchten Weierstraßschen Bezeichnung $z_t^d$.

Es ist keine wesentliche Einschränkung, wenn wir in (2) stets voraussetzen

$$\mathfrak{P}(0) = 1. \tag{2'}$$

Unter einer Umgebung von $\mathfrak{d}(\mathfrak{p}_\infty)$ verstehen wir hier einen $\mathfrak{d}(\mathfrak{p}_\infty)$ im Innern enthaltenden Bereich, der durch die Uniformisierende auf einen schlichten Kreis $|t| < c$ abgebildet wird. Statt die Uniformisierende von $\mathfrak{d}$ zu geben, können wir eine Umgebung von $\mathfrak{d}$ vorschreiben. Durch diese ist dann $t$ bestimmt.

Wir beschränken uns hier auf die *Klasse der rationalen Funktionen*, werden aber die Beweise so einrichten, daß sie mit geringfügigen Änderungen für allgemeinere Klassen Gültigkeit haben. Im rationalen Fall könnte man natürlich das meiste direkt viel einfacher beweisen, vieles wird hier auch selbstverständlich.

## § 2. Elementarfunktionen einer Veränderlichen.

Unter Elementarfunktion der Stelle $\mathfrak{d}$ von der Ordnung $\gamma$ ($\gamma$ ganz positiv) verstehen wir eine Klassenfunktion (hier also rationale Funktion), welche sich an der Stelle $\mathfrak{d}$ verhält wie $\frac{1}{t^\gamma} + \mathfrak{P}(t)$, und an einer fest vorgeschriebenen Stelle $\mathfrak{n}$ eine Nullstelle mindestens erster Ordnung hat, sich also dort verhält wie $t \cdot \mathfrak{P}(t)$. Ist speziell $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$, so soll „Nullstelle" bedeuten: Fehlen des Koeffizienten von $t^0$ in der Entwicklung an der Stelle $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$, d. h. die Funktion soll sich dort so verhalten wie $\frac{1}{t^\gamma} + t \cdot \mathfrak{P}(t)$.

Für allgemeine Klassen [1]) muß man außer einer oder mehreren festen Nullstellen $\mathfrak{n}$ noch eine Anzahl fester Pole erster Ordnung $\mathfrak{m}$ vorschreiben, damit die Elementarfunktion gerade eindeutig durch die gestellten Forderungen bestimmt ist. Die $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ bilden den ein für allemal festliegenden *Charakterisierungsdivisor*.

Wir bezeichnen die Elementarfunktion nach den zu ihrer Bestimmung notwendigen Stücken mit

$$\mathfrak{E}^{(\gamma)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{d}),$$

also im rationalen Fall, da hier kein $\mathfrak{m}$ auftritt, mit $\mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{d})$.

Aus der Definition selbst folgt, daß $\mathfrak{E}^{(\gamma)}$ erst dann bestimmt sein kann, wenn die Uniformisierende für die Stelle $\mathfrak{d}$ gegeben ist. Eine unserer wesentlichen Aufgaben wird die Untersuchung der Abhängigkeit von der Wahl von $t$ sein.

Ist die Uniformisierende vorgeschrieben, so ist $\mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, \mathfrak{d})$ eindeutig bestimmt. Gäbe es nämlich zwei solche Funktionen $\mathfrak{E}^{(\gamma)}$, $\bar{\mathfrak{E}}^{(\gamma)}$, so ist

$$\mathfrak{E}^{(\gamma)} - \bar{\mathfrak{E}}^{(\gamma)}$$

eine überall endliche (d. h. nirgends unstetige) Funktion der Klasse, d. h. eine Konstante. Da aber diese für $z = \mathfrak{n}$ verschwindet, so ist $\mathfrak{E}^{(\gamma)} \equiv \bar{\mathfrak{E}}^{(\gamma)}$.

Für die gewöhnliche Uniformisierende lassen sich die $\mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{d})$ sofort angeben. Es ist

---

[1]) *R. König*, Die Elementartheoreme bei den Riemannschen Transzendenten, Math. Zeitschrift 15 (1922).

$$(3)\qquad \mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}) = \frac{1}{(z-d)}\gamma - \frac{1}{(n-d)}\gamma; \qquad \mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{n}) = \frac{1}{(z-n)}\gamma;$$

$$\mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{p}_\infty) = z^\gamma - n^\gamma.$$

Dabei ist $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{n}$ eine endliche Stelle, ebenso $\mathfrak{n}$.

Legen wir aber $\mathfrak{n}$ nach $\mathfrak{p}_\infty$, so erhalten wir

$$(4)\qquad \mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{p}_\infty}(z,\mathfrak{d}) = \frac{1}{(z-d)}\gamma; \qquad \mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{p}_\infty}(z,\mathfrak{p}_\infty) = z^\gamma.$$

Es seien nun zwei verschiedene Uniformisierende der gleichen Stelle gegeben:

$$t \cdot \mathfrak{P}(t) = t^* \cdot \mathfrak{P}^*(t^*)$$

bzw. aufgelöst,

$$(5)\qquad t^* = t\,\mathfrak{P}(t) = t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \cdots.$$

Dann gehören i. A. zu $t$ und $t^*$ verschiedene Elementarfunktionen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^*$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^*$? Wegen (5) ist

$$(6)\qquad t^{*-1} = t^{-1}\{1 - C_2 t + (C_2^2 - C_3)t^2 - \cdots\} = t^{-1}\{1 + t\,\mathfrak{P}(t)\}.$$

Bei $\mathfrak{d}$ ist nun:

$$\mathfrak{E}^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z_\mathfrak{d},\mathfrak{d}) = \frac{1}{t} + \mathfrak{P}_1(t), \qquad \mathfrak{E}^{(1)^*}_{-,\mathfrak{n}}(z_\mathfrak{d},\mathfrak{d}) = \frac{1}{t^*} + \mathfrak{P}_2(t^*) = \frac{1}{t} + \mathfrak{P}_3(t),$$

bei $\mathfrak{n}$ entsprechend

$$\mathfrak{E}^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z_\mathfrak{n},\mathfrak{d}) = t_1\,\mathfrak{P}_4(t_1), \qquad \mathfrak{E}^{(1)^*}_{-,\mathfrak{n}}(z_\mathfrak{n},\mathfrak{d}) = t_1^*\,\mathfrak{P}_5(t_1^*) = t_1 \cdot \mathfrak{P}_6(t_1),$$

Daraus folgt aber sofort, daß $\mathfrak{E}^{(1)} - \mathfrak{E}^{(1)*}$ überall endlich und infolgedessen Null ist, also

$$(7)\qquad \mathfrak{E}^{(1)^*}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}) \equiv \mathfrak{E}^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}).$$

Dies gilt für jedes $\mathfrak{d}$ (auch für $\mathfrak{p}_\infty$), außer für $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$. In diesem Fall ist:

$$\mathfrak{E}^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z_\mathfrak{n},\mathfrak{n}) = \frac{1}{t} + t\,\mathfrak{P}_1(t), \qquad \mathfrak{E}^{(1)^*}_{-,\mathfrak{n}}(z_\mathfrak{n},\mathfrak{n}) = \frac{1}{t^*} + t^*\,\mathfrak{P}_7(t^*) = \frac{1}{t} - C_2 + t\,\mathfrak{P}_8(t),$$

also — analog wie oben —

$$(7')\qquad \mathfrak{E}^{(1)^*}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{n}) = \mathfrak{E}^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{n}) - C_2.$$

Allgemein ist

$$(6')\qquad t^{*-\gamma} = t^{-\gamma}(1 + C_1^{(\gamma)} t + C_2^{(\gamma)} t^2 + C_3^{(\gamma)} t^3 + \cdots).$$

Daraus folgt ganz entsprechend wie bei $\mathfrak{E}^{(1)}$, $\mathfrak{E}^{(1)*}$ für $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{n}$

$$\mathfrak{E}^{(\gamma)^*}_{-,\mathfrak{n}}(z_\mathfrak{d},\mathfrak{d}) = t^{*-\gamma} + \mathfrak{P}_1(t^*) = t^{-\gamma}\{1 + C_1^{(\gamma)} t + \cdots + C^{(\gamma)}_{\gamma-1} t^{\gamma-1}\} + \mathfrak{P}_2(t).$$

Ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$, so muß an Stelle von $\mathfrak{P}_1(t^*)$ und $\mathfrak{P}_2(t)$ stehen $t^*\,\mathfrak{P}_1(t^*)$ und $C_\gamma^{(\gamma)} + t\,\mathfrak{P}_2(t)$. Dann folgt aber sofort, daß

$$\mathfrak{E}^{(\gamma)*}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}) - \left(\mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}) + C_1^{(\gamma)}\,\mathfrak{E}^{(\gamma-1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}) + \cdots C^{(\gamma)}_{\gamma-1}\,\mathfrak{E}^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d})\right)$$

überall regulär ist, d. h. daß (wegen $\mathfrak{n}$) für $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{n}$ ist

$$(8)\qquad \boxed{\mathfrak{E}^{(\gamma)*}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}) = \mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}) + C_1^{(\gamma)}\,\mathfrak{E}^{(\gamma-1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}) + \cdots + C^{(\gamma)}_{\gamma-1}\,\mathfrak{E}^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}).}$$

für $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$ aber

$$(8') \quad \boxed{\mathfrak{E}^{(\gamma)*}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{n}) = \mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{n}) + C^{(\gamma)}_1 \mathfrak{E}^{(\gamma-1)}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{n}) + \cdots + C^{(\gamma)}_{\gamma-1} \mathfrak{E}^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{n}) + C^{(\gamma)}_{\gamma}.}$$

Da die $C^{(\gamma)}_j$ aus (5), (6), (6′) berechnet werden können, ist damit die Abhängigkeit der $\mathfrak{E}$ von der Uniformisierenden völlig geklärt.

Wir geben ein Beispiel:

$$z - d = t = \frac{t^*}{1 - t^*}$$

Hier ist

$$t^* = \frac{t}{1+t}, \qquad t^{*-1} = \frac{1}{t} + 1,$$

also

$$t^{*-\gamma} = \left(\frac{1}{t} + 1\right)^{\gamma} = \frac{1}{t^{\gamma}} + \binom{\gamma}{1}\frac{1}{t^{\gamma-1}} + \binom{\gamma}{2}\frac{1}{t^{\gamma-2}} + \cdots.$$

Es ist also

$$C^{(\gamma)}_j = \binom{\gamma}{j}.$$

Da die $\mathfrak{E}^{(\gamma)}$ hier schon angegeben wurden (vgl. (3) und (4)), so findet man: für endliches $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{n}$ und endliches $\mathfrak{n}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}^{(\gamma)*}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{d}) = {} & \frac{1}{(z-d)^{\gamma}} + \binom{\gamma}{1}\frac{1}{(z-d)^{\gamma-1}} + \cdots + \binom{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{z-d} \\ & - \frac{1}{(n-d)^{\gamma}} - \binom{\gamma}{1}\frac{1}{(n-d)^{\gamma-1}} - \cdots - \binom{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{n-d} \\ = {} & \left(\frac{1}{z-d} + 1\right)^{\gamma} - \left(\frac{1}{n-d} + 1\right)^{\gamma}.\end{aligned}$$

Für $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_\infty$ ergibt sich ebenso:

$$\mathfrak{E}^{(\gamma)*}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{n}) = \left(\frac{1}{z-n} + 1\right)^{\gamma} - 1, \qquad \mathfrak{E}^{(\gamma)*}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{p}_\infty) = (z+1)^{\gamma} - (n+1)^{\gamma}.$$

Als Beispiel nennen wir noch die *Faber*schen Polynome[1]) $P_\nu(z)$. Von diesen beweist Faber[2]), daß $P_\nu(z) = -\frac{1}{t^\nu} + \mathfrak{P}(t)$ ist, eine Gleichung, die sich zu

$$P_\nu(z) = -\frac{1}{t^\nu} + t\mathfrak{P}(t)$$

verschärfen läßt. D. h. aber es ist in unserer Bezeichnung:

$$-P_\nu(z) = \mathfrak{E}^{(\nu)}_{-,\mathfrak{p}_\infty}(z, \mathfrak{p}_\infty).$$

## § 3. Elementardifferentiale einer Veränderlichen.

Bei Betrachtung allgemeiner Klassen kommt in allen Formeln und Ergebnissen neben der Klasse noch die sog. komplementäre Klasse vor. Bei algebraischen Funktionen, also auch bei den rationalen, fallen beide Klassen zusammen. Diese

---

[1]) *G. Faber*, Polynomische Entwicklungen, Mathem. Annalen 57 (1903).

[2]) A. a. O. Formel (13).

beiden Klassen sind so verknüpft, daß immer Funktionen der einen und Differentiale der andern Klasse zusammengehören. Dabei ist ein Differential in einer Klasse bekanntlich so definiert: Es sei $f(x)$ eine Funktion der Klasse und zu jeder Stelle sei eine Uniformisierende $\tau$ gegeben. Dann bilden wir für jede Stelle $\mathfrak{d}$ : $f(x_\mathfrak{d}) \cdot \frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau}$. Die Gesamtheit der so erhaltenen Elemente $f(x_\mathfrak{d})\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = \mathfrak{P}(\tau)$ nennen wir ein Differential, abgekürzt: $f(x)dx$.

Wir haben die Veränderliche hier $x$ genannt, um daran zu erinnern, daß im allgemeinen Fall die Differentiale einer andern Klasse entnommen werden, wie die Funktionen.

Die Begriffe: Nullstelle, Pol, Ordnungszahl übertragen sich sofort auf Differentiale. Man sieht sofort, daß sie unabhängig von der Wahl der Uniformisierenden $\tau$ sind, genau so ist es ja auch für Funktionen. Nur die Erweiterung des Begriffs Nullstelle für Stellen, an denen ein Pol liegt (bei $\mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{n})$ ist nicht invariant gegen Änderung der Uniformisierenden. Nur bei den Differentialen tritt eine neue, sehr wichtige Invariante auf, *das Residuum*.

Unter dem *Residuum* von $f(x)dx$ bei $\mathfrak{d}$ verstehen wir den Koeffizienten von $\tau^{-1}$ in $f(x_\mathfrak{d})\frac{dx_\mathfrak{d}}{dt}$. Wir bezeichnen diesen wohl auch abgekürzt mit $\left[f(x_\mathfrak{d})\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}$.

Wir behaupten also, es ist

$$\left[f(x_\mathfrak{d})\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}} = \left[f(x_\mathfrak{d})\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau^*}\right]_{\tau^{*-1}}. \tag{9}$$

Ist $\mathfrak{d}$ kein Pol von $f(x)dx$, so ist nichts zu beweisen. Ist $\mathfrak{d}$ Pol, so ist $\tau$ die gewöhnliche Uniformisierende und

$$f(x_\mathfrak{d})\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = \frac{c_k}{\tau^k} + \frac{c_{k-1}}{\tau^{k-1}} + \cdots + \frac{c_2}{\tau^2} + \frac{c_1}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau). \tag{10}$$

Wir setzen dann $\left(\tau = x - d \text{ bzw. } \tau = \frac{1}{x}\right)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{k-1}\frac{c_k}{\tau^{k-1}} + \frac{1}{k-2}\frac{c_{k-1}}{\tau^{k-2}} + \cdots\cdots \frac{c_2}{\tau} + \int_0^\tau \mathfrak{P}(\tau)d\tau\,. \tag{11}$$

Nun ist (wegen (5), (6))

$$f(x)\frac{dx}{d\tau^*} = f(x)\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{d\tau^*} = \left\{\frac{c_1}{\tau} + \frac{d\varphi}{d\tau}\right\}\frac{d\tau}{d\tau^*} = \frac{c_1}{\tau^*} + \mathfrak{P}(\tau^*) + \frac{d\varphi}{d\tau^*}.$$

In $\frac{d\varphi}{d\tau^*}$ aber kommt $\tau^{*-1}$ nicht vor, also ist (9) bewiesen.

Genau wie früher Elementarfunktionen definieren wir jetzt Elementardifferentiale. Hier tritt ein Charakterisierungspol auf statt der Charakterisierungsnullstelle der $\mathfrak{E}$. Dieses Entsprechen gilt allgemein, man legt daher zweckmäßig den Pol ebenfalls nach $\mathfrak{n}$. Wir definieren:

$d\mathfrak{F}^{(\gamma)}_{\mathfrak{n},-}(x, \mathfrak{d})$ ist Elementardifferential der Ordnung $\gamma$ zur Stelle $\mathfrak{d}$, wenn es sich bei $\mathfrak{d}$ verhält wie $\tau^{-\gamma} + \mathfrak{P}(\tau)$, sonst überall regulär ist, außer bei $\mathfrak{n}$, wo es sich verhält wie $\tau_1^{-1}\mathfrak{P}(\tau_1)$. Falls $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$, soll sich $d\mathfrak{F}^{(\gamma)}$ bei $\mathfrak{n}$ verhalten wie $\tau^{-\gamma} + \tau^{-1}\mathfrak{P}(\tau)$.

Aus der Nichtexistenz anderer überall endlicher Funktionen als der Konstanten erschließt man die Nichtexistenz überall endlicher und einpoliger Differentiale in der Klasse der rationalen Funktionen und daraus dann den Unitätssatz für die $d\mathfrak{F}^{(\gamma)}$.

Wir stellen wieder für die gewöhnliche Uniformisierende und die verschiedenen Lagen von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{n}$ die $d\mathfrak{F}^{(\gamma)}$ auf. Wir erhalten für $\gamma = 1$ und $\gamma \geqq 2$ ($\mathfrak{d} \neq \mathfrak{n}$, beide endlich):

$$d\mathfrak{F}^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{d}) = \Big(\frac{1}{x-d} - \frac{1}{x-n}\Big)dx, \qquad d\mathfrak{F}^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{p}_\infty) = -\frac{dx}{x-n},$$

$$(12)\quad d\mathfrak{F}^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{n}) = \text{existiert nicht}, \qquad d\mathfrak{F}^{(\gamma)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{d}) = \frac{1}{(x-d)^\gamma},$$

$$d\mathfrak{F}^{(\gamma)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{p}_\infty) = -x^{\gamma-2}\,dx, \qquad d\mathfrak{F}^{(\gamma)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{n}) = \frac{dx}{(x-n)^\gamma},$$

dagegen für $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_\infty$ entsprechend:

$$(13)\quad d\mathfrak{F}^{(\gamma)}_{\mathfrak{p}_\infty,-}(x,\mathfrak{d}) = \frac{dx}{(x-d)^\gamma}, \qquad d\mathfrak{F}^{(1)}_{\mathfrak{p}_\infty,-}(x,\mathfrak{p}_\infty) = \text{existiert nicht}$$

$$d\mathfrak{F}^{(\gamma)}_{\mathfrak{p}_\infty,-}(x,\mathfrak{p}_\infty) = -x^{\gamma-2}dx \qquad \gamma \geqq 2.$$

Genau wie früher den Zusammenhang der $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^*$, so wollen wir hier den Zusammenhang zwischen den $d\mathfrak{F}$ und den zu einer anderen Uniformisierenden $\tau^*$ gehörigen $d\mathfrak{F}^*$ angeben.

Zunächst ist wieder

$$(14)\qquad \frac{d\mathfrak{F}^{(1)*}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{d})}{dx} \equiv \frac{d\mathfrak{F}^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{d})}{dx}.$$

In der Tat ist (vgl. (5), (6), (6′) und (9)) bei $\mathfrak{d}$:

$$\frac{d\mathfrak{F}^{(1)}(x_\mathfrak{d},\mathfrak{d})}{dx}\cdot\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau),$$

$$\frac{d\mathfrak{F}^{(1)*}(x_\mathfrak{d},\mathfrak{d})}{dx}\cdot\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau^*} = \frac{1}{\tau^*} + \mathfrak{P}(\tau^*) = \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau),$$

also

$$\frac{d\mathfrak{F}^{(1)*}(x_\mathfrak{d},\mathfrak{d})}{d\tau^*}\cdot\frac{d\tau^*}{d\tau} - \frac{d\mathfrak{F}^{(1)}(x_\mathfrak{d},\mathfrak{d})}{d\tau} = \mathfrak{P}(\tau).$$

Bei $\mathfrak{n}$ dagegen ist die Differenz:

$$\frac{d\mathfrak{F}^{(1)*}(x_\mathfrak{n},\mathfrak{d})}{d\tau_1^*}\cdot\frac{d\tau_1^*}{d\tau_1} - \frac{d\mathfrak{F}^{(1)}(x_\mathfrak{n},\mathfrak{d})}{d\tau_1} = \tau_1^{-1}\mathfrak{P}(\tau_1),$$

und an jedem anderen Punkt sind die Ordnungszahlen $\geqq 0$. Die Differenz ist also ein einpoliges Differential und als solches notwendig identisch Null. Schreiben wir nun statt $\frac{d\mathfrak{F}^{(1)}}{d\tau}$ zuletzt $\frac{d\mathfrak{F}^{(1)}}{dx}\cdot\frac{dx}{d\tau}$ und entsprechend bei $d\mathfrak{F}^{(1)*}$, so hat man (14).

Für $\gamma > 1$ ist

$$\frac{d\mathfrak{F}^{(\gamma)*}(x_\mathfrak{d},\mathfrak{d})}{d\tau^*}\cdot\frac{d\tau^*}{d\tau} = \Big(\frac{1}{\tau^{*\gamma}} + \mathfrak{P}(\tau^*)\Big)\frac{d\tau^*}{d\tau} = \frac{1}{1-\gamma}\cdot\frac{d\tau^{*1-\gamma}}{d\tau} + \mathfrak{P}(\tau^*)\frac{d\tau^*}{d\tau}.$$

Also wegen (5), (6′)

$$= \frac{1}{1-\gamma}\frac{d}{d\tau}\left\{\tau^{1-\gamma} + C_1^{(\gamma-1)}\tau^{2-\gamma} + C_2^{(\gamma-1)}\tau^{3-\gamma} + \cdots\right\} + \mathfrak{P}(\tau)$$

$$= \frac{1}{\tau^\gamma} + \frac{2-\gamma}{1-\gamma}C_1^{(\gamma-1)}\frac{1}{\tau^{\gamma-1}} + \frac{3-\gamma}{1-\gamma}C_2^{(\gamma-1)}\frac{1}{\tau^{\gamma-2}} + \cdots + \mathfrak{P}(\tau).$$

Daher ist, wenn wir wieder neben $\mathfrak{d}$ auch die Stelle $\mathfrak{n}$ betrachten,

$$\frac{d\mathfrak{F}^{(\gamma)*}}{d\tau^*}\cdot\frac{d\tau^*}{d\tau} - \left\{\frac{d\mathfrak{F}^{(\gamma)}(x,\mathfrak{d})}{d\tau} + \frac{2-\gamma}{1-\gamma}C_1^{(\gamma-1)}\frac{d\mathfrak{F}^{(\gamma-1)}(x,\mathfrak{d})}{d\tau} + \cdots + \frac{1}{\gamma-1}C_{\gamma-2}^{(\gamma-1)}\frac{d\mathfrak{F}^{(2)}(x,\mathfrak{d})}{d\tau}\right\}$$

ein einpoliges Differential, oder entsprechend wie oben:

$$(15)\qquad \boxed{\frac{d\mathfrak{F}^{(\gamma)*}(x,\mathfrak{d})}{dx} = \frac{d\mathfrak{F}^{(\gamma)}(x,\mathfrak{d})}{dx} + \frac{2-\gamma}{1-\gamma}C_1^{(\gamma-1)}\frac{d\mathfrak{F}^{(\gamma-1)}(x,\mathfrak{d})}{dx} + \cdots + \frac{1}{\gamma-1}C_{\gamma-2}^{(\gamma-1)}\frac{d\mathfrak{F}^{(2)}(x,\mathfrak{d})}{dx}.}$$

Abweichend von $\mathfrak{E}$ ergibt sich hier an der Stelle $\mathfrak{n}$ nichts Besonderes. Dies hängt damit zusammen, daß es wohl überall endliche rationale Funktionen, aber keine überall endlichen rationalen Differentiale gibt.

Aus (15) folgt, daß nicht nur $\mathfrak{E}^{(1)}$ und $\frac{d\mathfrak{F}^{(1)}}{dx}$ von der Wahl der Uniformisierenden unabhängig sind, sondern auch $\frac{d\mathfrak{F}^{(2)}}{dx}$. Beachtenswert ist ferner, daß nur die Ortsuniformisierende an der Stelle $\mathfrak{d}$ auf die Gestalt der $\mathfrak{E}$ und $d\mathfrak{F}$ einen Einfluß hat, nicht aber die der übrigen Stellen, ja es kommt gar nicht einmal auf die Stelle an, sondern nur auf die Verknüpfung zwischen $t$ und $t^*$, bzw. $\tau$ und $\tau^*$.

*Beispiel*: Wir wollen für dasselbe $t^*$, für das wir die $\mathfrak{E}$ berechneten, auch die $d\mathfrak{F}$ angeben. Also im Endlichen sei

$$x - d = \tau = \frac{\tau^*}{1-\tau^*},$$

entsprechend für $\mathfrak{p}_\infty$. Dann wird nach (15) wegen (12) und $C_j^{(\gamma)} = \binom{\gamma}{j}$ für $\gamma = 1, 2$

$$d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(1)*}(x,\mathfrak{d}) = d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(1)}(x,\mathfrak{d}) = \left(\frac{1}{x-d} - \frac{1}{x-n}\right)dx$$

$$d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(2)*}(x,\mathfrak{d}) = d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(2)}(x,\mathfrak{d}) = \frac{dx}{(x-d)^2}$$

$d\mathfrak{F}^{(1)*}(x,\mathfrak{n})$ existiert nicht

$$d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(2)*}(x,\mathfrak{n}) = d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(2)}(x,\mathfrak{n}) = \frac{dx}{(x-n)^2}$$

$$d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(1)*}(x,\mathfrak{p}_\infty) = d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(1)}(x,\mathfrak{p}_\infty) = -\frac{dx}{(x-n)}$$

$$d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(2)*}(x,\mathfrak{p}_\infty) = d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(2)}(x,\mathfrak{p}_\infty) = -dx$$

für $\gamma > 2$ aber (gleichgültig ob $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$ ist):

$$d\mathfrak{F}^{(\gamma)*}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{d}) = \left\{\frac{1}{(x-d)^\gamma} + \frac{\gamma-2}{\gamma-1}\binom{\gamma-1}{1}\frac{1}{(x-d)^{\gamma-1}} + \frac{\gamma-3}{\gamma-1}\binom{\gamma-1}{2}\frac{1}{(x-d)^{\gamma-2}} + \cdots\right\} dx$$

$$= \left\{\frac{1}{(x-d)^\gamma} + \binom{\gamma-2}{1}\frac{1}{(x-d)^{\gamma-1}} + \binom{\gamma-2}{2}\frac{1}{(x-d)^{\gamma-2}} + \cdots + \frac{1}{(x-d)^2}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{(x-d)^2}\left(\frac{1}{x-d}+1\right)^{\gamma-2} dx$$

$$d\mathfrak{F}^{(\gamma)*}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{p}_\infty) = -(x+1)^{\gamma-2}dx.$$

## § 4. Elementarfunktionen und Elementardifferentiale von zwei Veränderlichen.

In der allgemeinen Theorie der Klassen Riemannscher Funktionssysteme ist das wichtigste Hilfsmittel die Elementarfunktion und das Elementardifferential von zwei Veränderlichen. Wir geben die Definition [1]) hier nur für den rationalen Fall.

$E^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z,x)$ ist Elementarfunktion der Ordnung $\gamma$ vom „Argument" $z$ und dem „Parameter" $x$, wenn es bei festem $x$ rational in $z$, bei festem $z$ rational in $x$ ist und als Funktion von $z$

1. überall definiert ist, außer wenn $x$ in den „Ausnahmepunkten" $\mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{p}_\infty$ liegt,
2. überall regulär bleibt, außer bei $x$, wo es sich verhält wie $t^{-\gamma} + \mathfrak{P}(t)$ und
3. bei $\mathfrak{n}$ mindestens von erster Ordnung verschwindet.

$dF^{(\gamma)}_{\mathfrak{n},-}(x,z)$ ist Elementardifferential der Ordnung $\gamma$ vom „Argument" $x$ und dem „Parameter" $z$, wenn es bei festem $z$ rationales Differential in $x$, bei festem $x$ rationale Funktion von $z$ ist und als Differential von $x$

1. überall definiert ist, außer wenn $z$ in den „Ausnahmepunkten" $\mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{p}_\infty$ liegt.
2. überall regulär bleibt, außer bei $z$, wo es sich verhält wie $\tau^{-\gamma} + \mathfrak{P}(\tau)$, und
3. bei $\mathfrak{n}$, wo es höchstens einen Pol erster Ordnung besitzt.

Für die gewöhnliche Uniformisierende lassen sich die $E$ und $dF$ sofort angeben. Es wird hier

$$E^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z,x) = \frac{1}{(z-x)^\gamma} - \frac{1}{(n-x)^\gamma}, \tag{16}$$

$$dF^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x,z) = \left(\frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-n}\right)dx, \tag{17}$$

$$dF^{(\gamma)}_{\mathfrak{n},-}(x,z) = \frac{dx}{(x-z)^\gamma}, \qquad (\gamma > 1).$$

Aus (16) und (17) folgen sofort einige wichtige Beziehungen:

$$\boxed{dF^{(1)}(x,z) = -E^{(1)}(z,x)\,dx} \tag{18}$$

*das Vertauschungstheorem $I_1$ ($V\,Th\,I_1$)*

[1]) *R. König*, Die Elementartheoreme bei Riemannschen Transzendenten, Math. Zeitschrift 15 (1922), § 17, § 24.

$$(19)\quad E^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z, x_{\mathfrak{d}})\,\frac{dx_{\mathfrak{d}}}{d\tau} = \mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d}) + \binom{\gamma}{1}\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d})\cdot\tau + \binom{\gamma}{2}\mathfrak{E}^{(\gamma+2)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d})\,\tau^2 + \cdots,$$

der *Entwicklungssatz* der Stufe $\gamma$, der unverändert auch gilt, wenn $\mathfrak{d}$ nach $\mathfrak{p}_\infty$ rückt, wenn nur $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{n}$ bleibt, während der Entwicklungssatz bei $\mathfrak{n}$ lautet:

$$(19')\quad E^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z, x_{\mathfrak{n}})\,\frac{dx_{\mathfrak{n}}}{d\tau} = \frac{(-1)^{\gamma+1}}{\tau} + \mathfrak{E}^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{n}) + \binom{\gamma}{1}\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{n})\cdot\tau + \binom{\gamma}{2}\mathfrak{E}^{(\gamma+2)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{n})\,\tau^2 + \cdots.$$

Für $dF^{(\gamma)}$ lautet der Entwicklungssatz:

$$(20)\quad dF^{(\gamma)}_{\mathfrak{n},-}(x, z_{\mathfrak{d}}) = d\mathfrak{F}^{(\gamma)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{d}) + \binom{\gamma}{1}d\mathfrak{F}^{(\gamma+1)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{d})\,t + \binom{\gamma}{2}d\mathfrak{F}^{(\gamma+2)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{d})\,t^2 + \cdots,$$

bzw.

$$(20')\quad dF^{(\gamma)}_{\mathfrak{n},-}(x, z_{\mathfrak{n}}) = \binom{\gamma}{1}d\mathfrak{F}^{(\gamma+1)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{n})\,t + \binom{\gamma}{2}d\mathfrak{F}^{(\gamma+2)}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{n})\,t^2 + \cdots.$$

Ferner gilt noch der *Ableitungssatz*

$$(21)\quad E^{(\gamma)}(z,x) = \frac{1}{(\gamma-1)!}\,\frac{d^{\gamma-1}E^{(1)}(z,x)}{dx^{\gamma-1}},$$

$$(22)\quad \frac{dF^{(\gamma)}(x,z)}{dx} = \frac{1}{(\gamma-1)!}\,\frac{d^{\gamma-1}}{dz^{\gamma-1}}\left(\frac{dF^{(1)}(x,z)}{dx}\right).$$

Alle diese in der allgemeinen Theorie der Riemannschen Klassen äußerst wichtigen Sätze sind aus (16), (17) aber nur zu entnehmen für die *gewöhnliche* Uniformisierende. Wir werden sehen, daß (18), (19), (19′), (20), (20′) für $\gamma = 1$ richtig bleiben, für höhere $\gamma$ aber fortfallen, ebenso auch (21) und (22). Die ganze Herleitung des Entwicklungssatzes erster Stufe führen wir nur für $E^{(1)}$ durch, für $dF^{(1)}$ geben wir nur die wichtigsten Zwischenformeln an. Aus diesen ergibt sich dann auch (18).

Wir beweisen zuerst wieder den *Unitätssatz*: Es sei die Ortsuniformisierende für jede Stelle vorgeschrieben und $E^{(\gamma)}$ und $\tilde{E}^{(\gamma)}$ haben beide die Definitionseigenschaften. Dann ist bei festem $x$, wie genau derselbe Schluß wie bei den $\mathfrak{E}$ zeigt, $E^{(\gamma)} - \tilde{E}^{(\gamma)}$ eine überall endliche Funktion von $z$, d. h. von $z$ unabhängig,

$$E^{(\gamma)} - \tilde{E}^{(\gamma)} = \varphi(x).$$

Nun ist aber für jedes $x$ und $z = n$ das $\varphi(x) = 0$, also $\varphi(x) \equiv 0$. Entsprechend lautet der Beweis für die $dF$.

Wir haben im folgenden einige Male den Fall zu betrachten, daß $z$ und $x$ beide in der Umgebung desselben Punktes $\mathfrak{d}$ liegen. Wir setzen fest, daß dann die Uniformisierende von $z$ und $x$ beide zur gleichen Umgebung gehören, d. h. sich nur in der Bezeichnung unterscheiden sollen.

Es ist stets, mit entsprechender Bezeichnung wie früher:

$$(23)\quad E^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,x) = E^{(1)*}_{-,\mathfrak{n}}(z,x),$$

$$(24)\quad \frac{dF^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x,z)}{dx} = \frac{dF^{(1)*}_{\mathfrak{n},-}(x,z)}{dx},$$

der Beweis ist derselbe wie beim Unitätssatz.

$E^{(1)}(z, x)dx$ ist ein rationales Differential, hat also in der Umgebung jeder Stelle eine Potenzreihenentwicklung mit nur endlich vielen negativen Gliedern. Wir nehmen im folgenden an, $\mathfrak{n}$ liege nicht bei $\mathfrak{p}_\infty$; ist dies der Fall, so modifiziert sich einiges unwesentlich.

Wir unterscheiden nun folgende Fälle, die uns dann die verschiedenen Formen des Entwicklungsgesetzes geben:

1. $x$ in der Umgebung von $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{p}_\infty$,
2. $x$ in der Umgebung von $\mathfrak{p}_\infty$,
3. $x$ in der Umgebung von $\mathfrak{n}$.

*Fall I.* Hier lautet das Element für $E^{(1)}dx$:

$$E^{(1)}(z, x_\mathfrak{d}) \frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = \tau^k A_k(z, \mathfrak{d}) + \tau^{k+1} A_{k+1}(z, \mathfrak{d}) + \cdots$$

($k$ positive oder negative ganze Zahl oder Null). Zu bestimmen sind die $A_\gamma(z, \mathfrak{d})$ durch Untersuchung ihres funktionentheoretischen Verhaltens.

Ist $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{d}'$, so ist

$$E^{(1)}(z_{\mathfrak{d}'}, x_\mathfrak{d}) \frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = \mathfrak{P}(t_1, \tau)$$

und $\mathfrak{P}(t_1, \tau)$ enthält keine negativen $t_1$-Potenzen, denn $E^{(1)} \frac{dx}{d\tau}$ ist ja endlich, wenn $z \neq x$ ist. Daraus folgt: $A_\gamma(z_{\mathfrak{d}'}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{P}_\gamma(t_1)$. Ferner erschließt man ganz ebenso, daß

$$E^{(1)}(z_\mathfrak{n}, x_\mathfrak{d}) \frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = t_2 \mathfrak{P}(t_2, \tau),$$

also

$$A_\gamma(z_\mathfrak{n}, \mathfrak{d}) = t_2 \mathfrak{P}(t_2).$$

Es bleibt nur noch $E(z_\mathfrak{d}, x_\mathfrak{d}) \frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau}$ zu untersuchen. Hier kann man das Verhalten (auch für allgemeine Klassen) aus der Form leicht erschließen. Unabhängig davon erhält man es aus der Definition auf folgendem Wege: Es ist

$$E^{(1)}(z_x, x_\mathfrak{d}) = \left\{ \frac{1}{t_x} + \mathfrak{P}(t_x, \tau) \right\} \frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau}$$

Dabei ist $t_x$ die Uniformisierende der Stelle $x$, also

$$z - x = t_x + C_2 t_x^2 + \cdots.$$

Daraus folgt:

$$t_x = (z - x)\,(1 + (z - x)\,\mathfrak{P}_1(z - x)).$$

Andererseits ist für *endliches* $\mathfrak{d}$:

$$z - d = t\mathfrak{P}(t) = t + c_2 t^2 + \cdots, \qquad x - d = \tau \cdot \mathfrak{P}(\tau),$$

also

$$\begin{aligned} z - x &= t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots \\ &\quad - \tau - c_2 \tau^2 - c_3 \tau^3 - \cdots \\ &= (t - \tau)\,(1 + c_2 \frac{t^2 - \tau^2}{t - \tau} + c_3 \frac{t^3 - \tau^3}{t - \tau} + \cdots), \\ &= (t - \tau)\,\mathfrak{Q}(t, \tau) \end{aligned}$$

und daher
$$t_x = (t-\tau)\,\mathfrak{Q}(t,\tau)\,(1+(t-\tau)\,\mathfrak{P}_2(t,\tau))$$
$$t_x^{-1} = (t-\tau)^{-1}\,\mathfrak{Q}(t,\tau)^{-1}\,(1+(t-\tau)\mathfrak{P}_3(t,\tau)),$$

d. h.
$$t_x^{-1}\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau}\,\frac{1+2c_2\tau+3c_3\tau^2+\cdots}{\mathfrak{Q}(t,\tau)} + \mathfrak{P}_4(t,\tau).$$

Nun ist aber
$$\mathfrak{Q}(\tau,\tau) = \frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = 1+2c_2\tau+3c_3\tau^2+\cdots,$$

also
$$\mathfrak{Q}(t,\tau) = 1+2c_2\tau+3c_3\tau^2+\cdots+(t-\tau)\mathfrak{P}_5(t,\tau)$$
$$= (1+2c_2\tau+3c_3\tau^2+\cdots)\,(1+(t-\tau)\mathfrak{P}_6(t,\tau)).$$

Daraus folgt aber
$$t_x^{-1}\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + \mathfrak{P}_7(t,\tau)$$

oder
$$E^{(1)}(z_\mathfrak{d},x_\mathfrak{d})\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + \mathfrak{P}(t,\tau) = \Sigma\frac{\tau^\gamma}{t^{\gamma+1}} + \mathfrak{P}(t,\tau). \tag{25}$$

Daraus folgt weiter, daß
$$A_\gamma(z_\mathfrak{d},\mathfrak{d}) = \frac{1}{t^{\gamma+1}} + \mathfrak{P}(t).$$

M. a. W.: Die $A_\gamma$ haben genau die Definitionseigenschaften der $\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}$, d. h. es ist, da die $\mathfrak{E}^{(\gamma)}$ mit negativem Index als überall endliche Funktionen identisch verschwinden,

$$\boxed{E^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,x_\mathfrak{d})\frac{dx_\mathfrak{d}}{d\tau} = \sum_0^\infty{}^\gamma\,\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d})\tau^\gamma.} \qquad (E\,Th)$$

*Fall* 2:

Ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_\infty$, so ist nur in dem Beweis von (25) eine kleine Abänderung nötig: Es heißt dann wie oben
$$t_x = (z-x)\,(1+(z-x)\mathfrak{P}_1(z-x)).$$

Nun ist
$$z = \frac{1}{t+c_2t^2+\cdots}, \qquad x = \frac{1}{\tau+c_2\tau^2+\cdots}$$
$$(z-x) = -\frac{(t-\tau)\mathfrak{Q}(t,\tau)}{t\tau\mathfrak{P}(t)\mathfrak{P}(\tau)}, \qquad \frac{dx_{\mathfrak{p}_\infty}}{d\tau} = -\frac{1+2c_2\tau+3c_3\tau^2+\cdots}{(\tau\mathfrak{P}(\tau))^2},$$

wobei die Abkürzungen dieselben sind wie oben, daher:
$$t_x^{-1} = -(t-\tau)^{-1}\,(\mathfrak{P}(t,\tau))^{-1}\,t\cdot\tau\mathfrak{P}(t)\mathfrak{P}(\tau)\,(1+(t-\tau)P_1(t,\tau)),$$

wobei $P_1(t,\tau)$ allerdings noch negative Potenzen enthalten könnte. Daraus folgert man dann
$$t_x^{-1}\frac{dx_{\mathfrak{p}_\infty}}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + P_2(t,\tau),$$

wobei $P_2$ vielleicht auch negative $t$ und $\tau$ Potenzen enthält, also
$$E^{(1)}(z_{\mathfrak{p}_\infty},x_{\mathfrak{p}_\infty})\frac{dx_{\mathfrak{p}_\infty}}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + P_3(t,\tau).$$

In $P_3$ können aber keine negativen $t$-Potenzen vorkommen, da sonst $E^{(1)}$ bei $\mathfrak{p}_\infty$ gegen die Definition unstetig würde, wenn $\tau \neq 0$, d. h. $x$ nicht in $\mathfrak{p}_\infty$ liegt. Daraus folgt wie oben:

$$(E\,Th_{\mathfrak{p}_\infty}) \qquad \boxed{E^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z, x_{\mathfrak{p}_\infty})\frac{dx_{\mathfrak{p}_\infty}}{d\tau} = \sum_0^\infty \gamma\, \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{p}_\infty)\,\tau^\gamma.}$$

*Fall* 3: Hier verändert sich nichts, außer an der Stelle $\mathfrak{n}$ selbst. An Stelle von (25) tritt hier

$$(26) \qquad E^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z_\mathfrak{n}, x_\mathfrak{n})\frac{dx_\mathfrak{n}}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + \frac{1}{\tau} + t\mathfrak{P}(t, \tau)\,.$$

Man kommt hier wie oben zunächst zu

$$E^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z_\mathfrak{n}, x_\mathfrak{n})\frac{dx_\mathfrak{n}}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + \mathfrak{P}\,(t, \tau).$$

Da aber für $z = \mathfrak{n}$, d. h. $t = 0$ das $E^{(1)} = 0$ ist identisch in $x$, so ist $\mathfrak{P}(0, \tau) = \frac{1}{\tau}$, Also gilt (26). Aus (26) folgt weiter:

$$A_\gamma = \frac{1}{t^{\gamma+1}} + t\mathfrak{P}(t),$$

d. h. die $A_\gamma$ für $\gamma \geqq 0$ haben die Eigenschaften von $\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, \mathfrak{n})$, während $A_{-1}$ eine überall endliche Funktion ist, die in $\mathfrak{n}$ den Wert 1 hat, wohingegen die $A_\gamma$ für $\gamma < -1$ aber überall endlich sind und bei $\mathfrak{n}$, demnach also identisch verschwinden. Daher erhalten wir:

$$(E\,Th_\mathfrak{n}) \qquad \boxed{E^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z_\mathfrak{n}, x_\mathfrak{n})\frac{dx_\mathfrak{n}}{d\tau} = \frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty \gamma\, \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}_{-,\mathfrak{n}}(z, \mathfrak{n})\,\tau^\gamma.}$$

Damit ist der Beweis des Entwicklungssatzes für $E^{(1)}$ beendet. Die Herleitung des Entwicklungssatzes für $dF$ verläuft nicht anders. Wir erhalten hier die folgenden Formeln, (wobei der Koeffizient von $\tau^{-1}$ vom Residuensatz geliefert wird):

$$(27) \qquad \frac{dF^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x_\mathfrak{d}, z_\mathfrak{d})}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + \mathfrak{P}(t, \tau)\,,$$

$$\frac{dF^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x_{\mathfrak{p}_\infty}, z_{\mathfrak{p}_\infty})}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + \mathfrak{P}(t, \tau),$$

$$(28) \qquad \frac{dF^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x_\mathfrak{n}, z_\mathfrak{n})}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(t, \tau)\,,$$

$$(28') \qquad \frac{dF^{(1)}(x_\mathfrak{n}, z_\mathfrak{d})}{d\tau} = -\frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau)$$

und daher

$$(\widetilde{E\,Th}) \qquad \boxed{dF^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x, z_\mathfrak{d}) = \sum_0^\infty d\mathfrak{F}^{(\gamma+1)}_{\mathfrak{n},-}(x, \mathfrak{d})t^\gamma,}$$

$(\widetilde{E\,Th_{\mathfrak{p}_\infty}})$ $$\boxed{dF^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x, z_{\mathfrak{p}_\infty}) = \sum_0^\infty{}_\gamma\, d\mathfrak{F}^{(\gamma+1)}_{\mathfrak{n},-}(x, \mathfrak{d})t^\gamma,}$$

$(\widetilde{E\,Th_{\mathfrak{n}}})$ $$\boxed{dF^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x, z_{\mathfrak{n}}) = \sum_0^\infty{}_\gamma\, d\mathfrak{F}^{(\gamma+1)}_{\mathfrak{n},-}(x, \mathfrak{n})t^\gamma.}$$

Der Entwicklungssatz für $E^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,x)\dfrac{dx}{d\tau}$ bei allgemeiner Wahl der Uniformisierenden tritt zuerst bei *G. Faber*[1]) auf und zwar ist es der für den Fall[2]) $E^{(1)}_{-,\mathfrak{p}_\infty}(z, x_{\mathfrak{p}_\infty})\dfrac{dx_{\mathfrak{p}_\infty}}{d\tau}$.

Daß bei allgemeiner Wahl der Uniformisierenden der Entwicklungssatz in der obigen Form für $\gamma > 1$ nicht zu gelten braucht, macht man sich sofort an einem Beispiele klar. Übrigens sind für *gewöhnliche* Punkte $x$ (bzw. $z$) die höheren Stufen des Entwicklungssatzes für die $E$ (bzw. $dF$) nur eine andere Gestalt des Ableitungssatzes. Daß dieser aber bei allgemeiner Uniformisierenden nicht gilt, ist sofort zu sehen: Nach dem Unitätssatz ist bei festgewählter Uniformisierenden $E^{(\gamma)}$ eindeutig bestimmt. Wäre der Ableitungssatz gültig, so wäre aber $E^{(\gamma)}$ von der Wahl der Uniformisierenden unabhängig. Nun zeigt aber die bei den $\mathfrak{E}$ durchgeführte Überlegung unwesentlich modifiziert, daß

$$(29)\quad E^{(\gamma)*}_{-,\mathfrak{n}}(z, x) = E^{(\gamma)}_{-,\mathfrak{n}}(z, x) + C^{(\gamma)}_1 E^{(\gamma-1)}_{-,\mathfrak{n}}(z, x) + \cdots + C^{(\gamma)}_{\gamma-1} E^{(1)}_{-,\mathfrak{n}}(z, x).$$

Dabei haben die $C^{(\gamma)}_j$ dieselbe Bedeutung wie früher, nur ist der Entwicklungsmittelpunkt für $z$ nicht mehr $\mathfrak{d}$, sondern $x$. Der Ableitungssatz ist also nicht gültig. (29) zeigt aber darüber hinaus, daß die Ortsuniformisierenden nicht mehr völlig willkürlich gewählt werden dürfen, wenn alle $E$ (bzw. $E^*$) die in der Definition geforderten Eigenschaften haben sollen. In der Tat: seien die $E^{(\gamma)}$ einmal die zur gewöhnlichen Uniformisierenden gehörigen Elementarfunktionen. Schreiben wir dann jeder Stelle $x$ eine Uniformisierende willkürlich zu, so sind die $C^{(\gamma)}_j$ und damit auch $E^{(\gamma)*}$ im allgemeinen nicht analytische Funktionen von $x$. Nur $E^{(1)}$ ist von der Wahl der $t$ völlig unabhängig und darauf hauptsächlich beruht die besondere Stellung der ersten Stufe.

Ganz ebenso wie bei den $E$ ist es bei den $dF$. Wir geben der Vollständigkeit halber die Formel

$$(30)\quad \frac{dF^{(\gamma)*}_{\mathfrak{n},-}(x, z)}{dx} = \frac{dF^{(\gamma)}_{\mathfrak{n},-}(x, z)}{dx} + \frac{\gamma-2}{\gamma-1} C^{(\gamma-1)}_1 \frac{dF^{(\gamma-1)}_{\mathfrak{n},-}(x, z)}{dx} + \cdots + \frac{1}{\gamma-1} C^{(\gamma-1)}_{\gamma-2} \frac{dF^{(2)}_{\mathfrak{n},-}(x, z)}{dx}.$$

Der Vertauschungssatz $\mathrm{I}_1$ (Formel (18)) ergibt sich in unserm speziellen Falle einmal direkt aus der Unabhängigkeit von $E^{(1)}$ und $dF^{(1)}$ von der Wahl des $t$ bzw. $\tau$, allgemein aber ähnlich wie die Unitätssätze aus den Formeln (25), (26), (27), (28).

---

[1]) *G. Faber,* Polynomische Entwicklungen, Math. Ann. 57 (1903) S. 392/393.

[2]) Formel (11), in der statt $\mathfrak{P}(t,\tau)$ gesetzt werden darf $t\mathfrak{P}(t,\tau)$, entspricht unserer Formel (26), Formel (12) bezw. (7) bei Faber ist unser Entwicklungssatz.

## § 5. Über die Gültigkeit des Entwicklungzsatzes.

Wir wissen bisher über die Entwicklungssätze nur ihre Gültigkeit für sehr kleine $\tau$ bezw. $t$. Wir wollen die Konvergenz näher betrachten und zwar

1. bei festem $z$ und variablem $x$,
2. bei festem $x$ und variablem $z$,
3. wenn $z$ und $x$ beide variieren.

Wir beschränken uns auf $E^{(1)}\frac{dx}{d\tau}$. Durch $x - d = \tau \cdot \mathfrak{P}(\tau)$ $\left(\text{bezw. } \frac{1}{x} = \tau\,\mathfrak{P}(\tau)\right)$ wird eine Abbildung einer Umgebung von $\tau = 0$ auf eine Umgebung von $\mathfrak{d}$ bezw. $\mathfrak{p}_\infty$ vermittelt. Wir betrachten den größten Kreis $|\tau| < \sigma$, in dem $x$ eine Funktion rationalen Verhaltens in $\tau$ ist. Das Bild der Kurve $|\tau| = \sigma$ heiße die *singuläre Kurve* $C_\sigma$. Sie begrenzt einen im allgemeinen mehrblättrig über der $x$-Ebene liegenden einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}_\sigma$. Den Kreisen $|\tau| = r < \sigma$ entsprechen Niveaukurven $C_r$, die ebensolche Bereiche $\mathfrak{B}_r$ begrenzen. Es gibt ferner ein $\varrho \leqq \sigma$ derart, daß für $r < \varrho$ die $\mathfrak{B}_r$ schlicht[1]) über der $x$-Ebene liegen. Es sei zunächst $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{n}$.

Wir ordnen nun der Zahl $z \neq \mathfrak{d}$ eine positive Zahl $r$ wie folgt zu:

Hat $z$ keinen Spurpunkt innerhalb $\mathfrak{B}_\sigma$, so entspreche $z$ stets die Zahl $\sigma$. Hat $z$ Spurpunkte innerhalb $\mathfrak{B}_\sigma$, so ist unter den Bildpunkten $t$ im Kreis $|\tau| < \sigma$ einer vom kleinsten absoluten Betrag $r$. Dann sei $z$ zugeordnet die Zahl $r$. Nach derselben Vorschrift ordnen wir dem Charakterisierungspunkt $\mathfrak{n}$ eine Zahl $r_\mathfrak{n}$ zu. Ist $z$ fest, so entnimmt man dem Vertauschungssatz (18), daß $E^{(1)}(z, x)\frac{dx}{d\tau}$ in $x$ nur unstetig wird bei $z$ und bei $\mathfrak{n}$. Also ist $E^{(1)}\frac{dx}{d\tau}$ sicher regulär in dem kleineren der beiden Kreise $|\tau| < r$, $|\tau| < r_\mathfrak{n}$, während, wenn eine der Zahlen $r, r_\mathfrak{n}$ von $\sigma$ verschieden ist, auf dem Rand ein Pol liegt, also dieser Kreis auch wirklich Konvergenzkreis ist. Diesem Kreis entspricht in der $x$-Ebene ein Bereich $\mathfrak{B}_{r'}$ $(r' = \text{Min}\,(r, r_\mathfrak{n}))$. *Der Entwicklungssatz konvergiert also bei festem $z$, wenn $x$ einen Spurpunkt in $\mathfrak{B}_{r'}$ hat.*

Es sei gleich bemerkt, daß es auch noch andere $x$ geben kann, für die der Entwicklungssatz konvergiert. Dies tritt ein, wenn $\tau$ nicht nur Uniformisierende für $\mathfrak{d}$, sondern auch noch für andere Punkte $\mathfrak{d}'$ ist, wie z. B., wenn $\mathfrak{d} = 0$ ist und $x^2 + 2x = 2\tau$ gewählt wird. Hier gibt es außer dem $\mathfrak{B}_\sigma$ um $z = 0$ noch eine Umgebung $\overline{\mathfrak{B}}_\sigma$ von $x = -2$, welche auf den gleichen Kreis $|\tau| < \sigma$ abgebildet wird wie $\mathfrak{B}_\sigma$. Auch in $\overline{\mathfrak{B}}_\sigma$ konvergiert dann der Entwicklungssatz, stellt aber nicht $E^{(1)}(z, x)\frac{dx}{d\tau}$ dar.

Der zweite Fall ist leicht auf den ersten zurückzuführen. *Ist $x$ fest und $|\tau| = R < r_\mathfrak{n}$, so konvergiert der Entwicklungssatz sicher, wenn kein Spurpunkt von $z$ auf $C_R$ oder in $\mathfrak{B}_R$ liegt.*

Damit ist aber auch der Fall, daß $z$ und $x$ variieren erledigt. Ist nämlich

---

[1]) Bei Faber a. a. O. heißt die Kurve $C_\varrho$ singuläre Kurve.

$|\tau| \leqq R < r_\mathfrak{n}$ und $z$ beschränkt wie eben, so ist der Entwicklungssatz erst recht konvergent. Daraus kann man aber mit Faber einen wichtigen Schluß ziehen: Es sei $R < r_\mathfrak{n} \leqq \sigma$ und alle Spurpunkte von $z$ außerhalb oder auf dem Rand von $\mathfrak{B}_{R+\varepsilon}$ und $|\tau| \leqq R$. Dann hat für diese $z$ und $\tau$ das $\left| E^{(1)}(z,x)\frac{dx}{d\tau}\right|$ ein endliches Maximum $M$. Nach dem *Cauchy*schen Koeffizientensatz ist daher

$$\left| \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d})\right| \leqq \frac{M}{R^\gamma}. \tag{31}$$

*Daraus folgt aber, daß für die eben festgelegten $z$ und $|\tau| < R - \varepsilon$ die rechte Seite* des Entwicklungssatzes die geometrische Reihe $M\Sigma_\gamma \left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)^\gamma$ zur Majorante hat, also für diese $z$ und $\tau$ *gleichmäßig und absolut konvergiert.*

Bei dem Entwicklungssatz für $dF$ verläuft alles genau so, nur daß die Stelle $\mathfrak{n}$ nicht besonders berücksichtigt zu werden braucht. Ferner spielt bei $E^{(1)}$ das $\mathfrak{n}$ für die Konvergenz keine Rolle, wenn $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$ ist.

## § 6. Reihenentwicklungen analytischer Funktionen und Differentiale.

Wir deuteten in der Einleitung an, wie aus den Entwicklungssätzen die Reihenentwicklungen für beliebige Funktionen und Differentiale entspringen. Wir brauchen dazu eine Integraldarstellung, in die $dF^{(1)}$ bezw. $E^{(1)}$ eingeht.

Es sei $f(z)$ im *abgeschlossenen* Bereich $\mathfrak{B}_r$ regulär, und es sei $r < \varrho$ und $r \neq r_\mathfrak{n}$. Dann ist offenbar für jedes $z$ aus $\mathfrak{B}_r$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} dF^{(1)}_{\mathfrak{n},-}(x,z)\, f(x) = \begin{cases} f(z) - f(n), \\ f(z), \end{cases} \tag{32}$$

je nachdem $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{B}_r$ liegt oder nicht. Wenden wir nun noch $(\widetilde{ETh})$ auf $dF^{(1)}$ an, so ist, wegen der gleichmäßigen Konvergenz, für alle $z$ aus $\mathfrak{B}_{r-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ beliebig klein)

$$\left.\begin{matrix} f(z) - f(n) \\ f(z) \end{matrix}\right\} = \sum_0^\infty{}_\gamma\, t^\gamma \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} dF^{\gamma+1}_{\mathfrak{n},-}(x,\mathfrak{d})\, f(x)\,. \tag{I}$$

Für den Fall der gewöhnlichen Uniformisierenden ist das gerade die Taylorentwicklung. Jede in $\mathfrak{B}_r$ reguläre Funktion ($r < \varrho$) läßt sich also daselbst in eine Reihe nach Potenzen der Ortsuniformisierenden entwickeln. Im Falle $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$ beginnt die Reihe rechts mit $t^1$.

Es sei $g(x)dx$ ein im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}_r$ reguläres Differential. Dann findet man für dieses die Darstellung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} E(z,x)\frac{dx}{d\tau}g(z)dz = g(x)\frac{dx}{d\tau} \tag{33}$$

und vermöge $(ETh)$, wenn $\mathfrak{n}$ außerhalb $\mathfrak{B}_r$ liegt, die zu (I) duale ebenfalls nach Potenzen der Ortsuniformisierenden fortschreitende Entwicklung

$$g(x)\frac{dx}{d\tau} = \sum_0^\infty{}_\gamma\, \tau^\gamma \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}_{-,\mathfrak{n}}(z,\mathfrak{d})g(z)dz\,. \tag{Ĭ}$$

Liegt $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{B}_r$, so erhält man dieselbe Entwicklung, die aber nur in einem Teil von $\mathfrak{B}_r$ gilt, es sei denn, daß $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$ ist. Im Falle $\mathfrak{d} = 0$ ist wegen der Regularität von $g(x)dx$ der Koeffizient von $\tau^{-1}$, d. h. $\int g(z)dz = 0$, die Entwicklung (Ĭ) gilt wieder in ganz $\mathfrak{B}_r$. Die Formeln (32) und (33) bleiben richtig, wenn das Regularitätsgebiet von $f(z)$ bezw. $g(x)dx$ nicht $\mathfrak{B}_r$, sondern das komplementäre Gebiet $\bar{\mathfrak{B}}_r$ ist, wenn ich nur $C_r$ im umgekehrten Sinne durchlaufe. In diesem Fall ($f(z)$ regulär in $\bar{\mathfrak{B}}_r$) kann man aber auf (32) (*ETh*) nicht anwenden, da die Konvergenzbedingung nicht erfüllt ist. Vermöge des $VThI_1$ (18) geht aber (32), falls noch die Richtung von $C_r$ wieder geändert wird, über in

$$(32') \qquad \frac{1}{2\pi i}\int E_{-,\mathfrak{n}}(z,x)dx\, f(x) = \begin{cases} f(z) - f(n), \\ f(z). \end{cases}$$

Hierauf können wir nun (*ETh*) anwenden, wenn wir noch annehmen, daß $\mathfrak{n}$ entweder in $\bar{\mathfrak{B}}_r$ oder aber in $\mathfrak{d}$ selbst liegt. Je nachdem erhalten wir die in $\bar{\mathfrak{B}}_r$ gültige nach Klassenfunktionen (Elementarfunktionen) fortschreitende Reihe

$$(\mathrm{II}) \qquad f(z) - f(n) = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, \mathfrak{E}_{-,\mathfrak{n}}^{(\nu+1)}(z, \mathfrak{d})\, \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} \tau^\nu f(x)d\tau,$$

bzw.

$$(\mathrm{II}\mathfrak{n}) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r}\frac{f(x)d\tau}{\tau} + \sum_0^\infty{}^{\nu}\, \mathfrak{E}_{-,\mathfrak{n}}^{(\nu+1)}(z, \mathfrak{n})\, \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} \tau^\nu f(x)d\tau.$$

(IIn) enthält als Spezialfall die *Faber*schen Polynomreihen. Bei diesen ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{n} = \mathfrak{p}_\infty$.

Genau dieselbe Überlegung können wir für in $\bar{\mathfrak{B}}_r$ reguläre Differentiale $g(x)dx$ machen. Hier spielt $\mathfrak{n}$ keine besondere Rolle. Es ist

$$(33') \qquad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{dF(x,z)}{d\tau}\, g(z)dz = g(x)\, \frac{dx}{d\tau}$$

und wegen $\int g(z)dz = 0$ folgt die nach Klassendifferentialen (Elementardifferentialen) fortschreitende Darstellung

$$(\breve{\mathrm{I}}\mathrm{I}) \qquad g(x)\frac{dx}{d\tau} = \sum_1^\infty{}^{\nu}\, d\mathfrak{F}^{(\nu+1)}(x, \mathfrak{d})\, \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} t^\nu g(z)dz.$$

Auch die Verallgemeinerung der *Laurent*schen Reihe gelingt mit Hilfe der Entwicklungssätze leicht. Es sei $r' < r \leqq \varrho$ und $\mathfrak{B}_{r,r'}$ das von $C_{r'}, C_r$ begrenzte zweifach zusammenhängende Gebiet. Dann ist, wenn $f(z)$ bezw. $g(x)dx$ in $\mathfrak{B}_{r,\,r'}$ regulär analytisch ist, je nachdem ob $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{B}_{r,\,r'}$ liegt oder nicht,

$$\left.\begin{matrix} f(z) \\ f(z) - f(n) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} dF^{(1)}(x,z)f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r'}} E^{(1)}(z,x)dx\, f(x)$$

$$(\mathrm{III}) \qquad = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, t^\nu \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} d\mathfrak{F}^{(\nu+1)}(x, \mathfrak{d})f(x) + \sum_0^\infty \mathfrak{E}^{(\nu+1)}(z, \mathfrak{d})\, \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r'}} \tau^\nu f(x)\, dx.$$

Ist speziell $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$, so tritt auf der rechten Seite noch das Glied

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(x)dx}{\tau}$$

hinzu. Ebenso erhält man

$$g(x)\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \mathfrak{E}^{(1)}(z,x)\frac{dx}{d\tau}g(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r'}} \frac{dF^{(1)}(x,z)}{d\tau}\,g(z)\,dz$$

$$(\widetilde{\text{III}}) \qquad = \sum_0^\infty \gamma\,\tau^\gamma \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z,\mathfrak{d})g(z)dz + \sum_0^\infty \gamma\, d\mathfrak{F}^{(\gamma+1)}(x,\mathfrak{d})\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r'}} t^\gamma g(z)dz.$$

Dabei ist in (III) und ($\widetilde{\text{III}}$) die Lage von $\mathfrak{n}$ beliebig, wenn es außerhalb $C_r$, liegt, dagegen muß es in $\mathfrak{d}$ liegen, falls es innerhalb $C_{r'}$ liegt. Der Fall $\mathfrak{d} = \mathfrak{n}$ ist also stets dadurch ausgezeichnet, daß $\mathfrak{n}$ keinen Einfluß auf die Ausführbarkeit der Entwicklung hat, daher auch seine Bevorzugung durch *Faber*.

Man kann nun die Reihen nach den Potenzen von $\tau$ und $t$ und die nach den $d\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E}$ unabhängig von ihrer Entstehung betrachten, d. h. die mit irgendwelchen Koeffizienten angeschriebenen Reihen

$$(34) \qquad f(z) = \Sigma a_\gamma t^\gamma, \qquad g(x)\frac{dx}{d\tau} = \Sigma A_\gamma \tau^\gamma \qquad (\text{in } \mathfrak{B}_r),$$

$$(35) \qquad F(z) = \Sigma b_\gamma \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z,\mathfrak{d}), \qquad G(x)\frac{dx}{d\tau} = \Sigma \mathfrak{B}_\gamma d\mathfrak{F}^{(\gamma+1)}(x,\mathfrak{d}) \ (\text{in } \overline{\mathfrak{B}}_r)$$

untersuchen. Von den Reihen (34) als Potenzreihen ist sicher, daß durch $g(x)\,dx$ bezw. $f(z)$ die Koeffizienten $A_\gamma, a_\gamma$ eindeutig bestimmt sind. Daß das Entsprechende auch für die Reihen (35) gilt, hat *Faber* gezeigt. Sein Beweis bezieht sich zwar nur auf die Reihen nach den $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{n} = \mathfrak{p}_\infty$, ist aber allgemein gültig. Ebenso lassen sich die Sätze *Fabers* über das Verhalten auf der Konvergenzgrenze usw. übertragen. Wir gehen darauf nicht ein.

Wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Koeffizienten folgt aus (34), (35) in Verbindung mit (I), ($\breve{\text{I}}$) bezw. (II) ($\breve{\text{II}}$):

$$(36) \qquad a_\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} d\mathfrak{F}^{(\gamma+1)}(x,\mathfrak{d})f(x), \qquad A_\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z,\mathfrak{d})g(z)dz,$$

$$(37) \qquad b_\gamma = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \tau^\gamma F(x)d\tau, \qquad B_\gamma = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} t^\gamma G(z)dz.$$

Für $\gamma = 0$ ändert sich $(36_1)$ und $(37_1)$ ab je nach der Lage von $\mathfrak{n}$ in

$$\left.\begin{matrix} a_0 \\ a_0 - f(n) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int dF^{(1)}(x,\mathfrak{d})f(x),$$

$$(38) \qquad \left.\begin{matrix} b_0 \\ b_0 + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \frac{F(x)}{\tau}\,d\tau \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int F(x)d\tau.$$

Wendet man die Formeln (36), (37) an auf die Funktionen und Differentiale

$$(39) \qquad \begin{matrix} f(z) = t^\lambda & F(z) = \mathfrak{E}_{-,\mathfrak{n}}^{(\lambda+1)}(z,\mathfrak{d}) \\ g(x)dx = \tau^\lambda dx & G(x)dx = d\mathfrak{F}_{\mathfrak{n},-}^{(\lambda+1)}(x,\mathfrak{d}), \end{matrix}$$

so erhält man folgende Integralbeziehungen [1])

$$(40)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z,\mathfrak{d})t^\lambda dz=\begin{cases}0,\gamma\neq\lambda,\\1,\gamma=\lambda,\end{cases}\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\tau^\lambda d\mathfrak{F}^{(\gamma+1)}(x,\mathfrak{d})=\begin{cases}0,\gamma\neq\lambda,\\1,\gamma=\lambda.\end{cases}$$

## § 7. Anwendung auf divergente Reihen.

Die Reihen (I) und ($\breve{\text{I}}$) geben dort, wo ihr Konvergenzbereich über den der Taylorentwicklung von $f(z)$ hinausgreift, die analytische Fortsetzung von $f(z)$. Darin liegt auch ihre Brauchbarkeit zur Summation divergenter unendlicher Reihen begründet. Es sei

$$(41)\qquad c_0+c_1+c_2+\cdots.$$

Für kleine $|z|$ konvergiere dann

$$(42)\qquad f(z)=c_0z+c_1z^2+c_2z^3+\cdots.$$

Existiert nun, wenn $z$ von 0 an durch positive reelle Werte wächst:

$$(43)\qquad \lim_{z\to 1} f(z)=s$$

so soll $s$ die Summe der Reihe (41) heißen. Entwickeln wir $f(z)$ statt nach Potenzen von $z$ nach Potenzen einer Uniformisierenden $t$ für $\mathfrak{d}=0$, so erhalten wir:

$$(44)\qquad f(z)=c_0't+c_1't^2+c_2't^3+\cdots.$$

Wenn $z=1$ in $\mathfrak{B}_\varrho$ liegt, gibt es einen Bildpunkt $t_0$ von $z=1$, und wir haben zu suchen:

$$\lim_{t\to t_0} f(z).$$

Dabei ist durch die Festsetzung, daß $z$ reell gegen 1 gehen solle, eine Vorschrift für die Werte, die $t$ durchlaufen darf, gegeben. Wir beschränken uns auf den Fall, daß $t=z\mathfrak{P}(z)$ nur reelle Koeffizienten hat, daß also auch $t$ reell gegen $t_0$ geht. Existiert dann der limes $f(z)$ und konvergiert (44) für $t=t_0$, so ist nach dem *Abel*schen Stetigkeitssatz

$$(45)\qquad \lim_{t\to t_0} f(z)=c_0't_0+c_1't_0^2+c_2't_0^3+\cdots.$$

Wir drücken die $c_\nu'$ durch die $c_\nu$ aus. Nach (36) ist

$$(46)\qquad c_\nu'=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(x)d\mathfrak{F}^{(\nu+2)}(x,0).$$

Nun kann man aber, da $z$ selbst die „gewöhnliche" Uniformisierende von $\mathfrak{d}=0$ ist, Formel (8) anwenden, wenn man $t$ durch $z$, $t^*$ durch $t$ ersetzt. Berücksichtigt man noch (15), so ergibt sich

$$c_\nu'=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(x)\sum_0^\nu{}^{\varrho}\frac{\nu+1-\varrho}{\nu+1}C_\varrho^{(\nu+1)}\frac{dx}{x^{\nu+2-\varrho}}=\sum_0^\nu{}^{\varrho}\frac{\nu+1-\varrho}{\nu+1}C_\varrho^{(\nu+1)}c_{\nu-\varrho}$$

---

[1]) Für den Fall $\mathfrak{d}=\mathfrak{n}=\mathfrak{p}_\infty$ bei Krafft, a. a. O. Seite 51, Satz XVI.

Daraus folgt aber:

$$\sum_0^N{}_\nu c'_\nu t_0^{\nu+1} = \sum_0^N{}_\nu \sum_0^\nu{}_\varrho \frac{\nu+1-\varrho}{\nu+1} C_\varrho^{(\nu+1)} c_{\nu-\varrho} t_0^{\nu+1} = \sum_0^N{}_\sigma c_\sigma \sum_\sigma^N{}_\nu \frac{\sigma+1}{\nu+1} C_{\nu-\sigma}^{(\nu+1)} t_0^{\nu+1} = \sum_0^N{}_\sigma \varphi_\sigma(N) c_\sigma .$$

D. h. aber, wenn wir noch $\varphi_\sigma(N) = 0$ setzen für $\sigma > N$, daß

$$s = \lim_{N\to\infty} \sum_0^\infty{}_\sigma \varphi_\sigma(N) c_\sigma$$

ist. Diese Art der Summierung konvergenter Reihen hat *Perron* [1]) näher untersucht. Es ist auch leicht nachzurechnen, daß die $\gamma_\nu^{(\sigma+1)}$ bei *Perron* nichts anderes sind wie unsere $\frac{\sigma+1}{\nu+1} \cdot C_{\nu-\sigma}^{(\nu+1)}$. Es sind nämlich nach Definition der $\frac{\sigma+1}{\nu+1} C_{\nu-\sigma}^{(\nu+1)}$ (vergl. (6')) wegen der *Cauchy*schen Koeffizientenformel für Potenzreihen:

$$\frac{\sigma+1}{\nu+1} C_{\nu-\sigma}^{(\nu+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int - \frac{1}{\nu+1} \frac{dt^{-(\nu+1)}}{dx} x^{\sigma+1}\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{x^{\sigma+1}}{t^{\nu+2}}\, dt$$

und bei *Perron*

$$\gamma_\nu^{(\sigma+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{z^{\sigma+1}}{t^{\nu+2}}\, dt$$

also tatsächlich

$$\gamma_\nu^{(\sigma+1)} = \frac{\sigma+1}{\nu+1} C_{\nu-\sigma}^{(\nu+1)} .$$

[1]) *C. Perron*, Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation, Mathem. Zeitschrift 18 §§ 1–4.

# Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern.

(Dritter Teil [1]): Normierung.)

Von *Helmut Hasse* in Kiel.

Sei $l$ eine ungerade Primzahl, $k_\zeta$ der Körper der $l$-ten Einheitswurzeln, $k$ ein beliebiger Oberkörper von $k_\zeta$ und $\mathfrak{l}$ ein Primteiler von $l$ in $k$. In II. habe ich gezeigt, daß das Symbol $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{\varphi(\alpha, \beta)}$ durch die dortigen Festsetzungen (2.) bis (4.), die nach den Ergebnissen meiner Arbeit: „Zerlegungs- und Vertauschungssatz für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol ...." [2]) widerspruchsfrei sind, insofern vollständig definiert ist, daß nur ein für alle $\alpha$, $\beta$ aus $k(\mathfrak{l})$ fester, zu $l$ primer „Normierungsfaktor" für $\varphi(\alpha, \beta)$ willkürlich bleibt. Dabei ist die primitive $l$-te Einheitswurzel $\zeta$ irgendwie, aber ein- für allemal fest gewählt zu denken. Die Beseitigung der genannten, letzten Willkürlichkeit in der Definition von $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$, d. h. die Normierung der Funktion $\varphi(\alpha, \beta)$, geschieht dann, wie in II. S. 190/191 skizziert, mittels des *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetzes. Es soll hier etwas näher auf diese Normierung eingegangen werden.

Wir gehen aus von der Grundtatsache des *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetzes (II., S. 191), auf deren zuerst von *Furtwängler* erbrachten Beweis hier nicht näher eingegangen werden soll:

*Ist $\bar{\beta}$ eine beliebige und $\bar{\alpha}$ eine solche Zahl aus $k$, die für die Bereiche $k(\bar{\mathfrak{l}})$ der von $\mathfrak{l}$ verschiedenen Primteiler $\bar{\mathfrak{l}}$ von $l$ in $k$ eine $l$-te Potenz ist* [3]), *so gilt*:

$$\prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(\frac{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ dann und nur dann, wenn } \left(\frac{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}{\mathfrak{l}}\right) = 1 \text{ ist.}$$

Dabei bedeutet $\prod_{\mathfrak{p}}{}'$ das Produkt über alle zu $l$ primen Primteiler $\mathfrak{p}$ von $k$. Da das Symbol $\prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(\frac{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}{\mathfrak{p}}\right)$ hiernach die Eigenschaft (2.) und bekannterweise auch die

---

[1]) Diese Arbeit schließt sich an meine beiden vorhergehenden Arbeiten über das *Hilbert*sche Normenrestsymbol in algebraischen Zahlkörpern (ds. Journ., Bd. 153, S. 76 ff. u. S. 184 ff.) an, deren letzte ich hier kurz mit II. zitiere.

[2]) ds. Journ., Bd. 154, S. 20 ff.

[3]) Hierzu genügt etwa $\bar{\alpha} \equiv 1 \bmod \Pi \bar{\mathfrak{l}}^N$ für hinreichend hohes $N$.

Eigenschaften (3.) und (4.), (II., S. 185) hat, und da zu einem beliebigen Paar $a, \beta$ aus $k$ (l) stets $\bar{a}, \bar{\beta}$ aus $k$ mit den obigen Bedingungen existieren, die sich von $a, \beta$ nur um l-te Potenzen von $k$(l) unterscheiden, also die obigen $\bar{a}, \bar{\beta}$ bis auf $l$-te Potenzfaktoren von $k$(l) den gesamten Wertevorrat von $a, \beta$ in $k$(l) ausmachen, muß bei irgendeiner festen Normierung des obigen $\varphi(a, \beta)$ stets gelten:

$$\left(\frac{\bar{a}, \bar{\beta}}{\mathfrak{l}}\right)^c = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(\frac{\bar{a}, \bar{\beta}}{\mathfrak{p}}\right)$$

mit einem mod. l bestimmten, zu $l$ primen $c$.

Diese Relation kann dann zur Normierung der $\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ benutzt werden, indem $c \equiv -1 \bmod. l$, also das Bestehen von

$$\left(\frac{\bar{a}, \bar{\beta}}{\mathfrak{l}}\right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(\frac{\bar{a}, \bar{\beta}}{\mathfrak{p}}\right)$$

für alle $\bar{a}, \bar{\beta}$ aus $k$ mit den genannten Eigenschaften gefordert wird. Hierdurch wird natürlich auch eine eindeutige Normierung *aller* Symbole $\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ mit beliebigen $a, \beta$ aus $k$(l) geliefert, da, wie schon oben erwähnt, zu jedem solchen Paar $a, \beta$ ein Paar $\bar{a}, \bar{\beta}$ aus $k$ mit den genannten Eigenschaften existiert, das von $a, \beta$ nur um je eine $l$-te Potenz aus $k$ (l) unterschieden ist [1].

Für das so normierte Symbol gilt dann, wenn $a, \beta$ in $k$ liegen:

$$\prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1\,,$$

wo $\prod_{\mathfrak{p}}$ über alle Primteiler von $k$ erstreckt ist. Denn bezeichnet jetzt $\mathfrak{l}_1 \ldots, \mathfrak{l}_n$, die Primteiler von $l$ in $k$, und bestimmt man Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ aus $k$ so, daß

$$\begin{aligned}
a_1 &= a\xi_{11}^l\ (\mathfrak{l}_1), \quad & a_2 &= \xi_{21}^l\ (\mathfrak{l}_1), \ldots, & a_n &= \xi_{n1}^l\ (\mathfrak{l}_1)\\
a_1 &= \xi_{12}^l\ (\mathfrak{l}_1), \quad & a_2 &= a\xi_{22}^l\ (\mathfrak{l}_2), \ldots, & a_n &= \xi_{n2}^l\ (\mathfrak{l}_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_1 &= \xi_{1n}^l\ (\mathfrak{l}_n), \quad & a_2 &= \xi_{2n}^l\ (\mathfrak{l}_n), \ldots, & a_n &= a\xi_{nn}^l\ (\mathfrak{l}_n)
\end{aligned}$$

wird, so wird das durch

$$\alpha = a_1 a_2 \ldots, a_n \xi$$

definierte $\xi$ aus $k$ in allen $k(\mathfrak{l}_i)$ $l$-te Potenz, also

$$\prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(\frac{\xi, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1\,.$$

Weiter wird daher

$$\prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_i \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(\frac{a_i, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_i \left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1}. \qquad \text{w. z. b. w.}$$

---

[1]) Es genügt hierzu etwa $\bar{\alpha} \equiv \alpha \bmod. \mathfrak{l}^N$ ; $\bar{\alpha} \equiv 1 \bmod. \Pi \bar{\mathfrak{l}}^N$
$\bar{\beta} \equiv \beta \bmod. \mathfrak{l}^N$

mit hinreichend großem $N$ zu wählen.

Es ist nun von Wichtigkeit zu untersuchen, ob sich die so getroffene Normierung der Symbole $\left(\frac{a,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ auch direkt aus dem Körper $k(\mathfrak{l})$ heraus angeben läßt, ohne erst den Umweg über die anderen Primteiler $\mathfrak{p}$ zu machen. Das ist in der Tat möglich, wenn die Ordnung $e$ von $\mathfrak{l}$ prim zu $l$ ist. Um das zu zeigen, ist eine Regel anzugeben, wie man allein aus dem Körper $k(\mathfrak{l})$ heraus den bezüglich eines fest vorgegebenen $\zeta$ auf die obige Weise normierten Wert der Symbole $\left(\frac{a,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ zu definieren hat. Ich behaupte, daß die folgende Regel dies leistet:

„*Sei $e$ die zu $l$ prime Ordnung und $f$ der Grad von $\mathfrak{l}$ und $ef = m$. Man bestimme ein Fundamentalsystem*

$$\lambda = \eta_0; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m; \eta_a = \eta_{m+1}$$

*für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l})$ wie* (6.) *in II. und dazu eine Bilinearform*

$$L(x/y) \equiv \sum_{i,j=0}^{m+1} a_{ij} x_i y_j \bmod l,$$

*die für alle und nur die Wertsysteme $(x_i)$, $(y_j)$ mod. $l$ verschwindet, für die, wenn*

$$a = \prod_{i=0}^{m+1} \eta_i^{x_i} a_0^l \ (\mathfrak{l}); \qquad \beta = \prod_{j=1}^{m+1} \eta_j^{y_j} \ (\mathfrak{l})$$

*gesetzt wird, $\left(\frac{a,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$, d. h. $a$ Normzahl von $k(\sqrt[l]{\beta})$ für den Bereich von $\mathfrak{l}$ ist.* (Dies $L(x/y)$ ist nach II., Satz 3 bis auf einen konstanten, zu $l$ primen Faktor eindeutig bestimmt. Sei zunächst $L(x/y)$ irgendwie so gewählt.)

*Ferner sei*

$$1 + ul = \prod_{i=0}^{m+1} \eta_i^{x_i^{(0)}} a_0^l \ (\mathfrak{l}); \qquad \zeta = \prod_{j=0}^{m+1} \eta_j^{y_j^{(0)}} \beta_0^l \ (\mathfrak{l})$$

*die Darstellung der beiden Zahlen $1 + ul$ und $\zeta$ aus $k(\mathfrak{l})$ durch das Fundamentalsystem, wo $u$ eine solche Einheit aus $k(\mathfrak{l})$ bedeutet, für die*

$$s_{\mathfrak{l}}(u) \equiv u + u^l + \cdots + u^{l^{f-1}} \not\equiv 0 \bmod l$$

*ist. Man setze dann*

$$L_0(x/y) \equiv \frac{L(x/y)}{L(x^{(0)}/y^{(0)})} \cdot s_{\mathfrak{l}}(u) \,.\, e \bmod l \,^{1})$$

*und*

$$\left(\frac{a,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{L_0(x/y)},$$

*wenn $a, \beta$ in der obigen Darstellung vorliegen.*“

Um die Richtigkeit dieser Regel einzusehen, genügt es natürlich, an einem einzigen speziellen Paar $a, \beta$ nachzuweisen, daß die hier getroffene Festlegung des Normierungsfaktors mit der obigen, auf Grund des *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetzes getroffenen übereinstimmt. Wählt man als dies spezielle Paar die zur Normierung benutzten Zahlen $a = 1 + ul$, $\beta = \zeta$, so wird

$$L_0(x^{(0)}/y^{(0)}) \equiv s_{\mathfrak{l}}(u) \,.\, e \bmod l,$$

---

[1]) Es ist sicher $L(x^{(0)}/y^{(0)}) \not\equiv 0 \bmod l$, weil wegen $s_{\mathfrak{l}}(u) \not\equiv 0 \bmod l$ das Symbol $\left(\frac{1+ul,\zeta}{\mathfrak{l}}\right) \neq 1$ ist (siehe ds. Journ. Bd. 153, S. 197, (6.)).

und es ist zu zeigen, daß auch nach der „*Hilbert*schen Normierung“

$$\left(\frac{1+ul,\zeta}{l}\right)=\zeta^{s_l(u)\cdot e}$$

herauskommt. Das ergibt sich aber unmittelbar aus den in meiner früheren Arbeit[1]): „Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern ...“ a. S. 198/199 angestellten Betrachtungen, denen ja genau derselbe Gedankengang für die dort notwendige Konstantenbestimmung zugrunde liegt.

Ob im Falle, daß $e$ durch $l$ teilbar ist, eine ähnliche Normierungsregel, die allein vom Körper $k(\mathfrak{l})$ ausgeht, angebbar ist, vermag ich nicht zu entscheiden.

Es sei noch bemerkt, daß der Fall $l=2$, der von vornherein ausgeschlossen wurde, einer solchen Normierungsbetrachtung nicht bedarf, weil nur die eine prime Restklasse 1 mod. 2 existiert.

---

[1]) Ds. Journ., Bd. 153, S. 192 ff.

# Über die Beziehungen zwischen Logarithmus und Numerus in einem $\mathfrak{p}$-adischen algebraischen Körper.

Von *A. Disse* in Bremen.

Die vorliegende Arbeit steht in engem Zusammenhang mit einer Anzahl von Abhandlungen, die Herr *K. Hensel* vor einiger Zeit in dieser Zeitschrift veröffentlicht hat [1]).

In der ersten dieser Arbeiten hat er die von ihm in der „Zahlentheorie" von 1913 geschaffenen analytischen Methoden auf algebraische Zahlen angewendet und für die Zahlen eines algebraischen Körpers $K(\mathfrak{p})$ in bezug auf einen beliebigen Primteiler $\mathfrak{p}$ eine Exponentialdarstellung angegeben, wodurch jeder Zahl ein eindeutig bestimmter Logarithmus zugeordnet wird. In den folgenden Abhandlungen hat er dann die Zahlen von $K(\mathfrak{p})$ mit Hilfe einer anderen multiplikativen Darstellung auf rein arithmetischer Grundlage weiter untersucht. Er hatte nun den Wunsch, daß die logarithmische Methode auch auf jene Untersuchungen angewendet würde, um die Ergebnisse seiner Forschungen auf anderem Wege wiederzugewinnen und möglichst einfach und naturgemäß zu begründen. Auf seine Anregung hin habe ich eine solche Untersuchung in Angriff genommen, und es hat sich dabei diese Behandlungsweise in der Tat als sehr naturgemäß erwiesen, weil sie einerseits die Gesetze der untersuchten Körper und den inneren Grund der auftretenden Irregularitäten besonders durchsichtig erkennen läßt, andererseits die Anwendung auf spezielle Körper ohne viel Rechnung gestattet. Es bedurfte dazu einer Betrachtung des Zusammenhangs zwischen Logarithmus und Numerus. Dabei haben sich eine Reihe einfacher Beziehungen ergeben, die im folgenden dargestellt werden sollen.

---

[1]) 1. „Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für den Bereich eines beliebigen Primteilers." Band 145, S. 93—113 (zitiert mit H. I). — 2. „Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers." Band 146, S. 189—215 (zitiert mit H. II.). — 3. „Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul." Band 146, S. 216—228 (zitiert mit H. III.). — 4. „Allgemeine Theorie der Kongruenzklassengruppen und ihrer Invarianten in algebraischen Körpern." Band 147, S. 1—15 (zitiert mit H. IV). — 5. „Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers." Band 151, S. 210—212 (zitiert mit H. V.).

## § 1. Berechnung von Ordnungszahl und Index der Hauptlogarithmen.

Nach der ersten der erwähnten *Hensel*schen Arbeiten besteht für jede Zahl $\beta$ des $\mathfrak{p}$-adischen algebraischen Körpers $K(\mathfrak{p})$ die einfache Exponentialdarstellung

$$\beta = \pi^a w^b e^l \quad (\mathfrak{p}), \tag{1}$$

wo $\pi$ eine Primzahl $e$-ter Ordnung und $f$-ten Grades, $w$ eine primitive $(p^f - 1)$te Einheitswurzel in $K(\mathfrak{p})$ und $e^l$ eine $\mathfrak{p}$-adische algebraische Einseinheit $\eta = 1 + \xi$ bedeutet. Der sogenannte „Hauptlogarithmus" $l$ von $\beta$ ist durch die logarithmische Reihe

$$l = \log(1 + \xi) = \frac{\xi}{1} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} \mp \cdots \tag{2}$$

eindeutig bestimmt [1]). Es sei nun

$$\eta = 1 + \xi = 1 + \pi^k w^s \xi_0, \tag{3}$$

wo $k$ den Grad, $s$ den Index der Einseinheit und $\xi_0$ wieder eine Einseinheit bedeutet. Ihren Hauptlogarithmus kann man dann in der Form schreiben:

$$\log \eta = l = \pi^{\varrho_k} w^\sigma \xi_0; \tag{4}$$

darin heißt $\varrho_k$ die Logarithmenordnung, $\sigma$ der Logarithmenindex, und $\xi_0$ ist ebenfalls eine Einseinheit. Zwischen Grad $k$ und Logarithmenordnung $\varrho_k$ einerseits und den beiden Indizes $s$ und $\sigma$ andererseits bestehen nun einfache Beziehungen. Für die Ordnungszahl gilt der Satz:

Ist $k$ der Grad einer regulären Einseinheit, so hat die Ordnungszahl ihres Hauptlogarithmus den Wert

$$\varrho_k = p^\varkappa k - \varkappa e, \tag{5}$$

wo $p^\varkappa$ die niedrigste Potenz von $p$ ist, für welche

$$p^\varkappa k > \frac{e}{p-1} \tag{6}$$

ist. Bezeichnet man die größte in dem Bruch $\frac{e}{p-1}$ enthaltene ganze Zahl mit $r$ [2]), setzt also

$$r = \left[\frac{e}{p-1}\right], \tag{7}$$

so lautet die Bedingung

$$p^\varkappa k > r. \tag{6a}$$

Nur wenn $e$ die Form

$$e = e_0 p^{\nu_0 - 1}(p-1) \tag{7}$$

---

[1]) H. I, § 1, S. 96.

[2]) Diese Bezeichnungsweise steht in Einklang mit H. II, § 4, Formel (1), S. 202 und den folgenden Abhandlungen, während in H. I, § 1, Formel (4), S. 96 $r$ als kleinste ganze Zahl oberhalb $\frac{e}{p-1}$ definiert ist, so daß also $r$ durch $(r+1)$ zu ersetzen ist, was beim Vergleich der Formeln zu beachten ist.

besitzt, wobei $e_0$ nicht mehr durch $p$ teilbar ist, treten in gewissen Körpern irreguläre Einseinheiten der Grade

$$e_0 = e^{(\nu_0-1)} = \frac{e}{p^{\nu_0-1}(p-1)}, \quad e_0 p = e^{(\nu_0-2)} = \frac{e}{p^{\nu_0-2}(p-1)}, \cdots e_0 p^{\nu_0-1} = \frac{e}{p-1}$$

auf, deren Logarithmenordnung höher ist als der nach Formel (5) berechnete Wert.

Der Beweis dieses Satzes läßt sich auf Grund einer geometrischen Veranschaulichung einfach durchführen.

Trägt man für jedes Glied $\frac{\xi^m}{m}$ der logarithmischen Reihe (2) den Nenner $m$ als Abszisse und die $\mathfrak{p}$-adische Ordnungszahl $\mathsf{P}_m$ als Ordinate in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so kann man die erhaltenen Punkte so durch einen Streckenzug begrenzen, daß sämtliche Punkte auf demselben oder oberhalb desselben liegen. Für den Verlauf dieses Streckenzuges sind nur die Punkte maßgebend, die zu Gliedern von der Form $\frac{\xi^{p^\nu}}{p^\nu}$ gehören. Es läßt sich nämlich zeigen, daß alle zwischen $P_{\nu-1}$ mit den Koordinaten $(p^{\nu-1}, \mathsf{P}_{\nu-1})$ und $P_\nu$ mit den Koordinaten $(p^\nu, \mathsf{P}_\nu)$ gelegenen Diagrammpunkte oberhalb der Verbindungssehne $\overline{P_{\nu-1} P_\nu}$ liegen. Ein solches Zwischenglied hat nämlich die Form

$$\frac{\xi^{p^{\nu-1}+ap^h}}{p^{\nu-1}+ap^h} \text{ mit zu } p \text{ primem } a = 0, 1, \ldots, p^h - 1 \text{ und } 0 \leqq h \leqq \nu - 1,$$

hat also wegen $\xi \backsim \pi^k$ und $p \backsim \pi^e$ die Ordnungszahl

$$\mathsf{P}_h = p^{\nu-1}k + a p^h k - he.$$

Die Steigung der Verbindungssehne $\overline{P_h P_{\nu-1}}$ ist dann gleich

$$\frac{\mathsf{P}_h - \mathsf{P}_{\nu-1}}{p^{\nu-1} + a p^h - p^{\nu-1}} = \frac{p^{\nu-1}k + a p^h k - he - p^{\nu-1}k + (\nu-1)e}{a p^h}$$

$$= k + \frac{(\nu - 1 - h)e}{a p^h} \geqq k;$$

die Steigung der Verbindungssehne $\overline{P_\nu P_{\nu-1}}$ dagegen hat den Wert

$$\frac{\mathsf{P}_\nu - \mathsf{P}_{\nu-1}}{p^\nu - p^{\nu-1}} = \frac{p^\nu k - \nu e - p^{\nu-1}k + (\nu-1)e}{p^{\nu-1}(p-1)}$$

oder

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{tg} \alpha_\nu = k - \frac{e}{p^{\nu-1}(p-1)} < k.$$

Also können in der Tat keine anderen Punkte auf dem aus den Verbindungssehnen $\overline{P_0 P_1}$; $\overline{P_1 P_2}$; ... gebildeten Diagramm oder darunter liegen. Man erhält also einfachere Diagramme derselben Art, wenn man nur die Glieder der Form $\frac{\xi^{p^\nu}}{p^\nu}$ darstellt, indem man die Nennerexponenten $\nu$ als Abszisse und die Ordnungszahlen $\mathsf{P}_\nu = p^\nu k - \nu e$ als Ordinate einträgt. Der Ausdruck (8) für die Richtungskonstante geht für dies neue Diagramm über in

(8a) $$\operatorname{tg} \bar{a}_\nu = \frac{\mathsf{P}_\nu - \mathsf{P}_{\nu-1}}{\nu - (\nu-1)} = p^{\nu-1} k(p-1) - e;$$

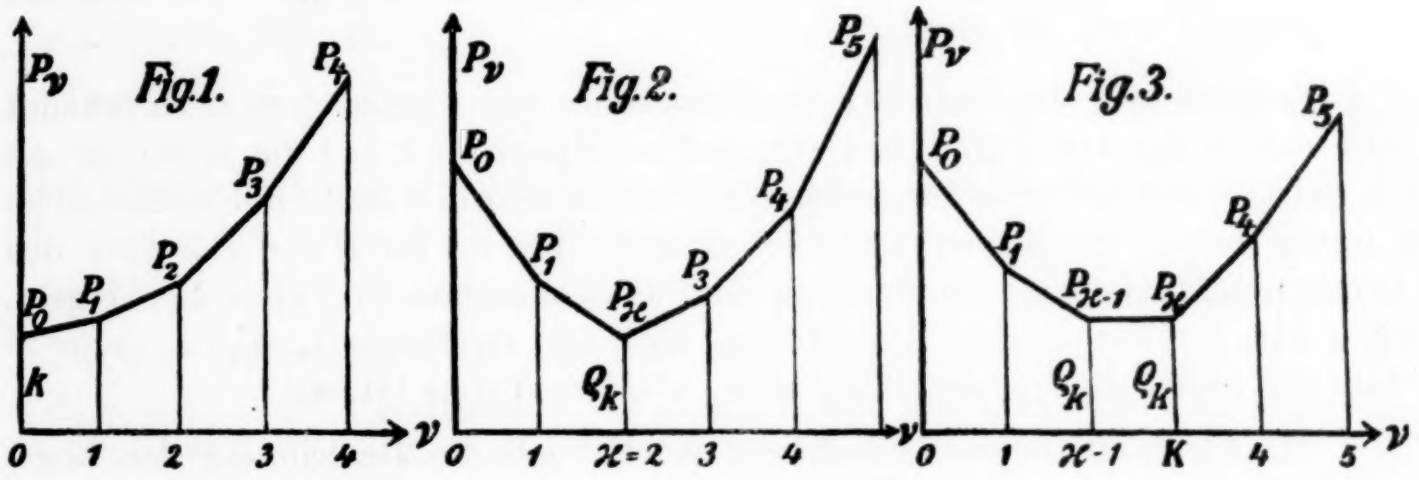
daraus kann man den Verlauf jeder Diagrammsehne sofort ablesen. Alle Sehnen, für die $p^{\nu-1}k > \frac{e}{p-1}$, also $\nu$ größer ist als der durch (6) eingeführte Exponent $\varkappa$, steigen, und zwar mit wachsendem $\nu$ immer steiler. Alle Sehnen, für die $p^{\nu-1}k < \frac{e}{p-1}$, also $\nu \leqq \varkappa$ ist, fallen, und zwar mit wachsendem $\nu$ immer flacher. Ist endlich $p^{\nu-1}k = \frac{e}{p-1}$, was nur für $e = e_0\, p^{\nu_0-1}(p-1)$ bei Graden von der Form

$$k = e_0\, p^\tau \qquad (\tau = 0, 1, \ldots, \nu_0 - 1)$$

eintreten kann, so verläuft die eine Sehne

$$\overline{P_{\varkappa-1}\, P_\varkappa} = \overline{P_{\nu_0-\tau-1}\, P_{\nu_0-\tau}},$$

welche zugleich die niedrigste ist, parallel der Abszissenachse. Es entstehen daher 3 verschiedene Typen von Diagrammen:




I. Das Diagramm besteht aus lauter steigenden Sehnen. Dann muß schon $p^0 k > \frac{e}{p-1}$, also $\eta$ nach H. I, § 1, S. 94 eine sogenannte *Exponentialeinheit* sein. Der tiefste Punkt des Diagramms ist der Anfangspunkt mit den Koordinaten 0 und $p^0 k - 0\, e = k$; die Ordnungszahl der logarithmischen Reihe stimmt also in diesem Falle mit dem Grad der Einseinheit überein.

II. Das Diagramm zerfällt in einen fallenden und einen steigenden Ast. $P_\varkappa$ ist der Endpunkt der letzten fallenden Sehne, also der tiefste Punkt des Diagramms; seine Ordinate hat den Wert $\mathsf{P}_\varkappa = p^\varkappa k - \varkappa e$ und ist kleiner als die Anfangsordinate $k$, also gilt dasselbe von der Ordnungszahl $\varrho_k$ der logarithmischen Reihe. Dieser Typ kommt nur für $\varkappa > 0$, also für Nichtexponentialeinheiten, deren Grad $k < \frac{e}{p-1}$ ist, in Frage; er tritt bei diesen stets und nur dann auf, wenn $k$ nicht die Form $e_0 p^\tau$ besitzt.

III. Die tiefste Sehne des Diagramms läuft der Abszissenachse parallel; das tritt für die Nichtexponentialeinheiten der Grade $e_0 p^\tau$ ein, wo $\tau$ die Werte $0, 1, \ldots, \nu_0 - 1$ durchläuft. Die Endpunkte dieser tiefsten Sehne haben die

Abszissen $\nu_0 - \tau - 1 = \varkappa - 1$ und $\nu_0 - \tau = \varkappa$ und die gemeinsame Ordinate $\mathsf{P}_\varkappa = p^\varkappa k - \varkappa e = p^{\varkappa-1} k - (\varkappa - 1) e$, die für $\varkappa = 1$, also $\tau = \nu_0 - 1$, mit dem Grad $k = e_0 p^{\nu_0 - 1} = \dfrac{e}{p-1}$ übereinstimmt, für $\varkappa > 1$ dagegen tiefer als $k$ liegt. Ist der Koeffizient von $\pi^{\mathsf{P}_\varkappa}$ von Null verschieden, so ist auch in diesem Fall die Logarithmenordnung $\varrho_k = \mathsf{P}_\varkappa$, also gleich $p^\varkappa k - \varkappa e \leqq k$; eine solche Einseinheit soll *regulär* heißen. Hebt sich dagegen in dem zu den Endpunkten der wagerechten Sehne gehörigen Doppelglied der Anfangskoeffizient fort, so ist $\varrho_k > \mathsf{P}_\varkappa$, also für $\mathsf{P}_\varkappa = k$ sogar größer als der Grad $k = e_0 p^{\nu_0 - 1}$; eine Einseinheit, für die $\varrho_k > p^\varkappa k - \varkappa e$ ist, soll *irregulär* heißen.

Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen; es ergibt sich noch folgender Zusatz:

> Ist der Grad $k$ einer regulären Einseinheit größer oder gleich $r$, so stimmen Logarithmenordnung und Grad überein; ist $k$ kleiner als $r$, so ist die Logarithmenordnung kleiner als der Grad. Unter den irregulären Einseinheiten dagegen kommen stets solche vor, deren Logarithmenordnung größer ist als der Grad.

Verfolgt man die Änderung des Diagramms mit wachsendem $k$, so erkennt man, daß es mit dem Typ II beginnt, und zwar liegt für $k = 1$ die Spitze $(\varkappa_1, \varrho_1)$ am tiefsten und am weitesten nach rechts verschoben und rückt mit wachsendem $k$ immer höher und immer weiter nach links, bis sie für $k = r + 1$ über den Anfangspunkt zu liegen kommt, so daß das Diagramm in Typus I übergeht. Ist $e$ von der Form $e_0 p^{\nu_0 - 1}(p - 1)$, so tritt für die Grade $e_0, e_0 p, \ldots, e_0 p^{\nu_0 - 1}$ statt der Spitze eine wagerechte Sehne, also der Typus III auf.

Als Abschluß dieser Betrachtung möchte ich die Berechnung der Logarithmenordnungen an einem Beispiel durchführen, um die Einfachheit des Verfahrens zu zeigen. Es sei $p = 3$, $e = 11$; also $r = \left[\dfrac{e}{p-1}\right] = \left[\dfrac{11}{2}\right] = 5$. Dann ist für jedes $k > 5$ jedes $\varrho_k = k$, also braucht nur $\varrho_1$ bis $\varrho_5$ berechnet zu werden.

| $k$ | $\varkappa$ | $\varrho_k$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | $3^2 \cdot 1 - 2 \cdot 11 = -13$ |
| 2 | 1 | $3 \cdot 2 - 1 \cdot 11 = -5$ |
| 3 | 1 | $3 \cdot 3 - 1 \cdot 11 = -2$ |
| 4 | 1 | $3 \cdot 4 - 1 \cdot 11 = +1$ |
| 5 | 1 | $3 \cdot 5 - 1 \cdot 11 = +4$ |
| 6 | 0 | $1 \cdot 6 - 0 \cdot 11 = +6$ usw. |

Ich gehe jetzt zur Berechnung des *Logarithmenindex* aus dem Index des Hauptgliedes der zugehörigen Einseinheit über. Auch hierbei haben sich einfache Zusammenhänge ergeben, die insbesondere für die Untersuchung der irregulären Einseinheiten von Bedeutung sind. Sie führen zu derselben einfachen Charakteri-

sierung der irregulären Einseinheiten, wie sie in den *Hensel*schen Arbeiten von einem ganz anderen Ausgangspunkt aus hergeleitet ist [1]).

Besitzt zunächst der Grad der Einseinheit nicht die Form $e_0 p^\tau$, ihr Logarithmendiagramm also nicht den Typus III, so besteht zwischen dem Hauptgliedindex $s$ und dem Logarithmenindex $\sigma$ eine Beziehung, die der für die Ordnungszahl abgeleiteten Formel (5) genau entspricht. Es ist nämlich

$$\sigma \equiv p^\varkappa s - \varkappa q \pmod{p^f - 1}, \tag{9}$$

wo $\varkappa$ genau wie bei der Ordnungszahl durch die Bedingung (6) $p^\varkappa k > r$ bestimmt ist, während $q$ den Index der Primzahl $p$ in dem betreffenden Körper bedeutet. Da sich nämlich $p$ in der Form $p = \pi^e w^q \zeta_p$ darstellen läßt, wo $\zeta_p$ eine Einseinheit bedeutet, so hat das niedrigste Glied der logarithmischen Reihe die Form

$$\frac{\xi^{p^\varkappa}}{p^\varkappa} = \pi^{p^\varkappa k - \varkappa e} w^{p^\varkappa s - \varkappa q} + \cdots = \pi^{\varrho k} w^\sigma + \cdots,$$

woraus sich die Kongruenz (9) unmittelbar ablesen läßt. Für Exponentialeinheiten kann $\sigma = s$ angenommen werden, da für diese $\varkappa = 0$ ist; also stimmen für diese das Hauptglied der Einseinheit und das Anfangsglied der logarithmischen Reihe genau überein.

Ist dagegen $k = e_0 = \dfrac{e}{p^{\nu_0 - 1}(p-1)}$, so gibt es nach dem Diagrammtypus III zwei Glieder von gleicher niedrigster Ordnung $\varrho_{e_0}$; also erhält man wegen $\varkappa = \nu_0$ als Koeffizienten des Anfangsgliedes die Summe

$$w^{p^{\nu_0} s - \nu_0 q} + w^{p^{\nu_0 - 1} s - (\nu_0 - 1)q} \equiv \zeta \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{10}$$

wo $\zeta$ eine Zahl eines vollen Restsystems modulo $\mathfrak{p}$, also etwa einen der Werte $0, 1, w, w^2, \ldots w^{p^f - 2}$ bedeutet. Aus dieser Kongruenz läßt sich eine einfachere herleiten, indem man sie mit $w^{\nu_0 q}$ multipliziert. Sie erhält dann die Form

$$w^{p^{\nu_0} s} + w^{p^{\nu_0 - 1} s} w^q \equiv \zeta w^{\nu_0 q} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ersetzt man darin noch $w^q$ durch den mod. $\mathfrak{p}$ kongruenten Wert $(-w^g)$, wo $g$ den Index von $(-p)$ in dem betreffenden Körper bedeutet, so kann man dafür schreiben

$$w^{p^{\nu_0} s} - w^{p^{\nu_0 - 1} s} w^g \equiv (-1)^{\nu_0} \zeta w^{\nu_0 g} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$x \equiv w^{p^{\nu_0 - 1} s} \pmod{\mathfrak{p}} \tag{11}$$

und berücksichtigt, daß die rechte Seite ebenfalls eine Zahl eines vollen Restsystems modulo $\mathfrak{p}$ darstellt, die mit $\xi$ bezeichnet werden möge, so erhält man die wichtige Kongruenz

$$\varphi(x) = x^p - x w^g \equiv \xi \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{12}$$

Auf Grund dieser Indexkongruenz läßt sich nun eine einfache Unterscheidung der regulären und irregulären Körper durchführen. Ein Körper soll irregulär heißen, wenn er auch irreguläre Einseinheiten enthält, d. h. solche, deren Logarithmen-

---

[1]) z. B. H. II, § 3, S. 199; § 4, S. 205.

ordnung höher ist als der nach Formel (5) berechnete Wert $\varrho_k = p^x k - \varkappa e$; er heißt regulär, wenn er nur reguläre Einseinheiten von der Logarithmenordnung $\varrho_k = p^x k - \varkappa e$ enthält. Dann gilt der einfache Satz:

Ein Körper $K(\mathfrak{p})$ ist stets und nur dann regulär, wenn in ihm die Kongruenz

$$\varphi(x) = x^p - x\, w^g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{13}$$

keine von Null verschiedene Lösung besitzt.

Existiert nämlich in $K(\mathfrak{p})$ auch nur eine von Null verschiedene Lösung $x_0$ der Kongruenz (13), so kann man eine Einseinheit $\overline{\eta_0} = 1 + \pi^{e_0} w^{s_0} + \cdots$ vom Grade $e_0$ so wählen, daß der zugehörige Wert (11)

$$x \equiv w^{p^{\nu_0 - 1} s_0} \pmod{\mathfrak{p}}$$

dieser Lösung $x_0$ modulo $\mathfrak{p}$ kongruent wird, denn die Kongruenz $p^{\nu_0 - 1} s_0 \equiv \text{Ind. } x_0 \pmod{p^f - 1}$ ist stets lösbar. Dann ist

$$\varphi(x) = x^p - x\, w^g \equiv x_0{}^p - x_0\, w^g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}};$$

also verschwindet der Koeffizient des Anfangsgliedes der logarithmischen Reihe, also ist $\log \overline{\eta_0}$ von höherer Ordnung als $\varrho_{e_0} = p^x e_0 - \varkappa e$, also enthält der Körper in der Tat eine irreguläre Einseinheit $\overline{\eta_0}$.

Die Kongruenz (13) besitzt aber stets und nur dann von Null verschiedene Lösungen, wenn

$$x^{p-1} \equiv w^g \pmod{\mathfrak{p}},$$

also $w^g$ in $K(\mathfrak{p})$ eine $(p-1)$-te Potenz ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $g$ durch $(p-1)$ teilbar ist; es sei

$$g \equiv g^{(0)} (p-1) \pmod{p^f - 1} \tag{14}$$

Dann besitzt (13) die $p$ verschiedenen Lösungen

$$a\, x_0 \equiv a\, w^{g^{(0)}} \pmod{\mathfrak{p}} \text{ für } a = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{15}$$

denn es ist

$$\varphi(a\, x_0) \equiv a \cdot \varphi(x_0) \equiv a \cdot \varphi(w^{g^{(0)}}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Andere inkongruente Lösungen kann die Kongruenz (13) nicht besitzen, da sie vom $p$-ten Grade ist. Für den Hauptgliedkoeffizienten der irregulären Einseinheiten $e_0$-ten Grades folgt daraus

$$w^{s_0} \equiv a\, w^{g_0} \pmod{\mathfrak{p}}, \qquad \text{wo } g_0 \equiv \frac{g^{(0)}}{p^{\nu_0 - 1}} \equiv \frac{g}{(p-1)\, p^{\nu_0 - 1}} \pmod{p^f - 1}$$

ist, denn das zugehörige $x$ besitzt den Wert

$$x_a \equiv (a\, w^{g_0})^{p^{\nu_0 - 1}} \equiv a\, w^{g^{(0)}} \equiv a\, x_0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Nach den Ergebnissen von S. 181 besitzen die Indexkongruenzen für die Grade $e_0 p^\tau (\tau = 1, 2, \ldots \nu_0 - 1)$ ebenfalls die Form (10), wenn darin $\nu_0$ durch $\nu_\tau = \nu_0 - \tau$ ersetzt wird, denn auch für sie enthält die logarithmische Reihe zwei Glieder niedrigster Ordnung. Führt man in (11) dieselbe Substitution aus, so gelangt man zu derselben Kongruenz (12). Besitzt also (13) eine von Null verschiedene

Lösung, so existieren auch für die Grade $e_0 p^\tau$ irreguläre Einseinheiten $\overline{\eta}_\tau = 1 + \pi^{e_0 p^\tau} w^{s_\tau} + \cdots$ von zu hoher Logarithmenordnung. Wegen

$$\varrho_{e_0 p^{\nu_0 - 1}} = \varrho_{e^{(0)}} = p^{\nu_0} e_0 - e = p^{\nu_0 - 1} e_0 = e^{(0)}$$

gibt es darunter mindestens $p - 1$, deren Logarithmenordnung $\overline{\varrho}_{e^{(0)}} > \varrho_{e^{(0)}}$ sogar höher ist als ihr Grad $e^{(0)} = \dfrac{e}{p-1} = r$. Die Hauptgliedkoeffizienten dieser irregulären Einseinheiten haben die Werte

$$w^{s_\tau} \equiv a\, w^{g_0 p^\tau} \pmod{\mathfrak{p}},$$

wie aus der Kongruenz

$$p^{\nu_0 - 1} g_0 = p^{\nu_0 - \tau - 1} (g_0 p^\tau) \equiv g^{(0)} \pmod{p^f - 1}$$

leicht ersichtlich ist. Man hat also das Ergebnis:

Ein Körper $K(\mathfrak{p})$ ist stets und nur dann irregulär, wenn sowohl $e$ als Ind. $(-p)$ durch $(p-1)$ teilbar ist, wenn also $(-p)$ in $K(\mathfrak{p})$ eine $(p-1)$-te Potenz ist [1]). Dann existieren in $K(\mathfrak{p})$ je $(p-1)$ nicht äquivalente irreguläre Einseinheiten der Grade $e_0, e_0 p, \ldots, e_0 p^{\nu_0 - 1}$ von der Form

$$\overline{\eta}_\tau = 1 + \pi^{e_0 p^\tau} w^{g_0 p^\tau} a + \cdots \quad \begin{pmatrix} \tau = 0, 1, \ldots, \nu_0 - 1 \\ a = 1, 2, \ldots, p-1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

deren Logarithmenordnungen $\overline{\varrho}_{e_0 p^\tau}$ höher sind als die der übrigen Einseinheiten gleichen Grades.

Über Ordnungszahl und Index dieser irregulären Logarithmen läßt sich allgemein nichts aussagen, da sie nicht mehr vom Hauptglied der Einseinheit allein abhängen, sondern durch die folgenden Glieder und durch die Darstellung der Primzahl $p$ in dem betreffenden Körper mit bedingt sind. Logarithmenordnung und -index können daher für äquivalente irreguläre Einseinheiten, d. h. für solche mit gleichem Hauptglied, ganz verschieden sein.

Ist dagegen der Körper $K(\mathfrak{p})$ regulär, besitzt also die Kongruenz (13) keine von 0 verschiedene Lösung, so gehört zu jedem Wert von $x = w^{p^{\nu_0 - 1} s}$, also auch zu jedem Hauptgliedindex $s$, ein und nur ein Wert $\xi \equiv w^{\sigma + \nu_0 g}$, also ein eindeutig bestimmter Logarithmenindex $\sigma$. Zu verschiedenen Werten $s_1$ und $s_2$ gehören auch verschiedene Werte $\sigma_1$ und $\sigma_2$, denn aus $\xi_1 \equiv \xi_2 \pmod{\mathfrak{p}}$ würde folgen

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (x_1^p - x_2^p) - (x_1 - x_2) w^g \equiv (x_1 - x_2)^p - (x_1 - x_2) w^g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

also

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

## § 2. Die zu den Hauptlogarithmen gehörigen Numeri.

Nach den Ergebnissen von § 1 gehört zu jeder Einseinheit von $K(\mathfrak{p})$ ein eindeutig bestimmter Hauptlogarithmus. In diesem Paragraphen soll der umgekehrte Übergang vom Logarithmus zum Numerus näher untersucht werden. Es gilt darüber der Satz:

---

[1]) H. II, § 5, S. 212.

Zu jeder logarithmischen Reihe von $K(\mathfrak{p})$ läßt sich durch ein endliches Verfahren mindestens eine Einseinheit als Numerus berechnen.

Für einen Logarithmus $l$, dessen Ordnungszahl $\varrho$ größer als $r$ ist, bildet nämlich die Exponentialeinheit:

$$e^l = 1 + \frac{l}{1!} + \frac{l^2}{2!} + \cdots \tag{1}$$

den gesuchten Numerus[1]). Sein Hauptglied stimmt mit dem Anfangsglied des Logarithmus überein. Dazu zeige ich, daß alle Glieder der Reihe (1) von höherer Ordnung sind als das Glied $\frac{l}{1!} = \pi^e w^\sigma + \cdots$. Die Ordnungszahl des Gliedes $\frac{l^m}{m!}$ hat den Wert[2])

$$m\varrho - \frac{m - s_m}{p-1} e = m\Big(\varrho - \frac{e}{p-1}\Big) + s_m \frac{e}{p-1};$$

diejenige von $\frac{l}{1!}$ ist $\varrho - \frac{e}{p-1} + \frac{e}{p-1}$, also die Differenz jener Ordnungszahlen

$$(m-1)\Big(\varrho - \frac{e}{p-1}\Big) + \frac{e}{p-1}(s_m - 1).$$

Ist nun $\varrho > r$, so ist $\varrho - \frac{e}{p-1} > 0$, während $s_m - 1 \geqq 0$ ist, also ist die Differenz immer positiv, also das Anfangsglied in der Tat von der niedrigsten Ordnung.

Für Logarithmen, deren Ordnungszahl kleiner oder gleich $r$ ist, konvergiert dagegen die Exponentialreihe (1) nicht, also kann sie nicht den gesuchten Numerus liefern. Doch lassen sich in diesem Falle zunächst Grad und Index des Hauptgliedes der zugehörigen Nichtexponentialeinheit aus Logarithmenordnung $\varrho$ und Logarithmenindex $\sigma$ bestimmen. Ist der vorgelegte Logarithmus regulär, d. h. hat seine Ordnungszahl die Form $\varrho = p^x k - \varkappa e$, (vgl. § 1, S. 179, Gl. (5)), so erhält man für den gesuchten Grad $k$ des Numerus den Wert

$$k = \frac{\varrho + \varkappa e}{p^x}. \tag{2}$$

Darin ist $\varkappa e$ das kleinste Vielfache von $e$, für das $\varrho + \varkappa e > r$ ist. Der Index des Hauptgliedes ergibt sich bei einem Diagramm vom Typus II, also für $k \gtrless e_0 p^\tau$, durch Auflösung der Kongruenz (9) von § 1, S. 183 zu

$$s \equiv \frac{\sigma + \varkappa q}{p^x} \pmod{p^f - 1}. \tag{3}$$

Da $p^x$ und $(p^f - 1)$ teilerfremd sind, ergibt sich daraus zu jedem beliebigen Wert von $\sigma$ ein eindeutig bestimmter Wert von $s$. Bei einem Diagramm vom Typus III dagegen, also wenn sich aus (2) für $k$ ein Wert von der Form $e_0 p^\tau$ ergibt, ist die Indexkongruenz

---

[1]) H. I, § 1, S. 94.

[2]) *Hensel*, Zahlentheorie, Kap. VI, § 2, S. 111, (3) und persönliche Mitteilung des Verfassers.

(4) $$\xi \equiv x^p - x\,w^\varrho \pmod{\mathfrak{p}}$$

nach $x \equiv w^{p^{\nu_0-1}s} \pmod{\mathfrak{p}}$ aufzulösen, was durch eine endliche Anzahl von Versuchen geschehen kann. Also läßt sich auch für diesen Typus aus dem Index eines regulären Logarithmus der Hauptgliedindex $s$ des Numerus bestimmen.

Ist dagegen der vorgelegte Logarithmus irregulär, d. h. ist seine Ordnungszahl höher als der nach (5) von § 1 sich ergebende Wert, so kann der Fall eintreten, daß (2) keinen ganzzahligen Wert für $k$ liefert, oder daß die Indexkongruenz (4) nicht nach $x$ auflösbar ist. Dann muß aber die gegebene logarithmische Reihe mit einem der irregulären Logarithmen $\overline{L}_{e_0 p^\tau}$ von höchster Irregularitätsordnung, die am Ende dieses Paragraphen (Seite 197) hergeleitet werden, das gleiche Anfangsglied besitzen. Also muß der gesuchte Numerus mit einer der irregulären Einseinheiten von höchstem Irregularitätsgrade (vgl. S. 198) in den Anfangsgliedern übereinstimmen. Da diese nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, führt auch in diesem Falle eine endliche Anzahl von Versuchen zum Ziel.

Hat man auf diese Weise zu dem vorgelegten Logarithmus $l = \pi^\varrho w^\sigma + \cdots$ eine zweigliedrige reguläre Einseinheit

$$\eta_k = 1 + \pi^k w^s$$

bzw. eine aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehende irreguläre Einseinheit

$$\overline{\eta}_\tau = 1 + \pi^{e_0 p^\tau} w^{\varrho_0 p^\tau} a + \cdots + \pi^n w_n$$

von höchstem Irregularitätsgrade bestimmt, deren Logarithmus $l_k$ dasselbe Anfangsglied $\pi^\varrho w^\sigma$ besitzt, also zu $l$ äquivalent ist, so ist die Differenz

$$l - l_k = l_1$$

ein Logarithmus von mindestens $\varrho_{k+1}$-ter Ordnung. Die Differenz zweier Logarithmen ist nämlich wieder ein Logarithmus; ihre Ordnungszahl ist größer als $\varrho_k$; also hat sie mindestens den Wert $\varrho_{k+1}$. Aus dem Anfangsglied von $l_{k_1} = \pi^{\varrho_{k_1}} w^{\sigma_1} + \cdots$ kann nach demselben Verfahren eine reguläre zweigliedrige Einseinheit $\eta_{k_1} = 1 + \pi^{k_1} w^{s_1}$ von dem höheren Grade $k_1$ oder eine irreguläre mehrgliedrige Einseinheit $\overline{\eta}_{\tau_1}$ von höchstem Irregularitätsgrade mit äquivalentem Logarithmus bestimmt werden. So fortschließend gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einem Logarithmus $l_{r+1}$, dessen Ordnungszahl größer als $r$ ist, zu dem also die Exponentialeinheit $e^{l_{r+1}}$ als Numerus gehört. Aus dieser additiven Zerfällung des Logarithmus

(5) $$l = l_k + l_{k_1} + \cdots + \overline{L}_{k_i} + \cdots + l_{r+1}$$

folgt durch Übergang zum Numerus für die zum Logarithmus $l$ gehörige Einseinheit der Wert

(6) $$\eta = (1 + \pi^k w^s)(1 + \pi^{k_1} w^{s_1}) \cdots (1 + \pi^{e_0 p^\tau} w^{\varrho_0 p^\tau} + \cdots + \pi^n w_n) \cdots e^{l_{r+1}}.$$

Also läßt sich in der Tat zu jedem Logarithmus mindestens ein Numerus durch ein endliches Verfahren berechnen, auch wenn er eine Nichtexponentialeinheit ist. Er soll der „Hauptwert" des Numerus heißen und auch dann symbolisch mit $e_l$ bezeichnet werden [1]), wenn die Exponentialreihe (1) nicht konvergiert.

[1]) H. I, § 4, S. 105.

Aus dieser Berechnung ergibt sich, daß nicht jede beliebige $\mathfrak{p}$-adische Reihe

$$\gamma = \pi^{\varrho} w^{\sigma} + \pi^{\varrho+1} w^{\sigma_1} + \cdots \tag{7}$$

als Logarithmus einer Einseinheit desselben Körpers aufgefaßt werden kann. Die logarithmischen Reihen bilden vielmehr im allgemeinen einen eigentlichen Teilbereich von $K(\mathfrak{p})$, dessen Elemente sich nach der Definition der Logarithmen durch Addition und Subtraktion wiedererzeugen, also einen Modul. Ist zwar $\varrho > r$, so ist $\gamma$ stets eine logarithmische Reihe, denn dann konvergiert die Exponentialreihe

$$e^{\gamma} = 1 + \frac{\gamma}{1!} + \frac{\gamma^2}{2!} + \cdots$$

und stellt eine eindeutig bestimmte Einseinheit dar. Ist dagegen $\varrho \leqq r$, so sind die Glieder der Reihe (7) gewissen Bedingungen unterworfen, damit sie dem Modul der logarithmischen Reihen angehört. Zunächst muß das Anfangsglied der Reihe mit dem eines regulären oder eines irregulären Logarithmus übereinstimmen. Da sich, wie in einer folgenden Arbeit gezeigt wird, die irregulären Logarithmen auf eine endliche Anzahl von solchen von höchster Irregularitätsordnung zurückführen lassen, kann man die Übereinstimmung mit einem solchen durch eine endliche Anzahl von Versuchen feststellen. Damit andererseits Übereinstimmung mit dem Anfangsglied eines regulären Logarithmus stattfindet, ist notwendig, daß $\frac{\varrho + \varkappa e}{p^{\varkappa}}$ eine ganze Zahl ist. Hat diese nicht die Form $e_0 p^{\tau}$, so ist diese Bedingung auch hinreichend, denn die Indexkongruenz $\sigma \equiv p^{\varkappa} s - \varkappa q \pmod{p^f - 1}$ ist wegen $(p^{\varkappa}, p^f - 1) = 1$ für jedes beliebige $\sigma$ nach $s$ auflösbar. Die für $k = e_0 p^{\tau}$, also für reguläre Logarithmen vom Diagrammtypus III auftretende Indexkongruenz

$$\xi \equiv x^p - x\, w^g \pmod{\mathfrak{p}}$$

dagegen ist dann und nur dann für jeden beliebigen Wert von $\xi$ nach $x$ auflösbar, wenn die Kongruenz $\varphi(x) = x^p - x\, w^g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ keine von 0 verschiedene Lösung besitzt, wenn also $K(\mathfrak{p})$ nach § 1, S. 184 regulär ist. Wenn nämlich die Kongruenz

$$\varphi(x) = x^p - x\, w^g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

die $p$ verschiedenen Lösungen

$$a\, x_0 \equiv a\, w^{g^{(0)}} \pmod{\mathfrak{p}} \text{ für } a = 0, 1, \cdots, p-1$$

besitzt, so gehört zu je $p$ inkongruenten Zahlen

$$x_1 + a\, x_0 \equiv x_1 + a\, w^{g^{(0)}} \pmod{\mathfrak{p}}$$

derselbe Wert $\xi_1 = \varphi(x_1)$, denn es ist

$$\varphi(x_1 + a w^{g^{(0)}}) \equiv (x_1^p - x_1 w^g) + a(x_0^p - x_0 w^g) \equiv \varphi(x_1) + a\varphi(x_0) \equiv \xi_1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Also kann $\varphi(x) \equiv \xi \pmod{\mathfrak{p}}$ in solchen Körpern nur $p^{f-1}$ inkongruente Werte annehmen; also besitzt für die übrigen $(p^f - p^{f-1})$ Werte von $\xi$ die Indexkongruenz keine Lösung.

Erfüllt nun das Anfangsglied von $\gamma$ entweder die irregulären oder die regulären logarithmischen Bedingungen, so bestimmt man nach dem obigen Ver-

fahren eine reguläre oder irreguläre Einseinheit mit äquivalentem Logarithmus $l$, bildet die Differenz $\gamma - l$ und untersucht deren Anfangsglied, das sicher von höherer Ordnung ist als $\varrho$, ebenso. Da man die Untersuchung nur bis zu einem Gliede $(r+1)$-ter Ordnung fortzusetzen braucht, kann man in der Tat durch ein endliches Verfahren entscheiden, ob eine vorgelegte Reihe ein Logarithmus ist oder nicht.

Es muß nun noch die Anzahl der zu ein- und demselben Logarithmus gehörigen Numeri festgestellt werden. Diese Frage beantwortet folgender Satz:

> In jedem Körper gehören zu einem Logarithmus genau $p^\mu$ Numeri, wo $p^\mu$ der Exponent der höchsten in $K(\mathfrak{p})$ enthaltenen Einheitswurzeln ist, der eine Potenz von $p$ ist; sie unterscheiden sich nur um Potenzen einer primitiven $p^\mu$-ten Einheitswurzel.

Damit nämlich eine Zahl $\omega = \pi^a w^b e^c$ von $K(\mathfrak{p})$ eine $p^\mu$-te Einheitswurzel ist, müssen folgende drei Bedingungen erfüllt sein:

$$(8)\qquad \begin{cases} 1)\ ap^\mu = 0, \text{ also } a = 0, \\ 2)\ bp^\mu \equiv 0 \pmod{p^f - 1}; \text{ also } b = n \cdot (p^f - 1), \\ 3)\ cp^\mu = 0, \text{ also } c = 0. \end{cases}$$

Also sind die $p^\mu$-ten Einheitswurzeln Einseinheiten vom Logarithmus 0. Da ihre Logarithmenordnung $+\infty$ höher ist als ihr endlicher Grad, sind sie irregulär. Folglich ist für eine beliebige Einseinheit $\eta$

$$\log \eta = \log \eta + n \cdot \log \omega = \log (\eta \cdot \omega^{en}),$$

d. h. die $p^\mu$ Einseinheiten

$$(9)\qquad \eta,\ \eta\omega,\ \eta\omega^2, \ldots,\ \eta\omega^{p^\mu - 1},$$

die aus dem Hauptwert $\eta$ durch Multiplikation mit den Potenzen einer primitiven $p^\mu$-ten Einheitswurzel hervorgehen, besitzen denselben Logarithmus.

Es ist also nur noch zu untersuchen, unter welcher Bedingung $K(\mathfrak{p})$ die $p^\mu$-ten Einheitswurzeln enthält, und welche Werte $\mu$ annehmen kann. Man kann dafür das einfache Kriterium aufstellen:

> In einem Körper existieren stets und nur dann von 1 verschiedene Einseinheiten $\omega$ vom Logarithmus 0, wenn sich in ihm irreguläre Einseinheiten angeben lassen, deren Logarithmenordnungen oberhalb $r = \dfrac{e}{p-1}$ liegen.

Ist nämlich $\log \omega = 0$, so ist a fortiori $\log \omega \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{r+1}}$; also ist die Bedingung notwendig. Ist andererseits $\eta = 1 + \pi^{e_0 p^\tau} w_\tau + \cdots$ eine irreguläre Einseinheit, deren Logarithmus $\log \eta = \pi^{r+n} w_n + \cdots$ von höherer als $r$-ter Ordnung ist, so existiert eine Exponentialeinheit $(r+n)$-ten Grades $\eta_n = e^{\pi^{r+n} w_n + \cdots}$ von gleichem Logarithmus, und $\omega_i = \dfrac{\eta}{\eta_n}$ ist dann eine Einseinheit vom Grade $e_0 p^\tau$ vom Logarithmus 0. Dann ist $\omega_i^{p^{\nu_0 - \tau}}$ die niedrigste Potenz von $\omega_i$, welche Exponentialeinheit ist; ihr Logarithmus $p^{\nu_0 - \tau} \log \omega_i$ hat den Wert 0, also ist der zugehörige Numerus gleich 1. Es ist daher in der Tat

(10) $$\omega_i^{p^{\nu_0-\tau}} = 1 \quad (\mathfrak{p}),$$

also $\omega_i$ eine $p^{\nu_0-\tau}$-te Einheitswurzel. Da $\tau$ die Werte $0, 1, \ldots \nu_0 - 1$ durchlaufen kann, sind für $\mu$ die Werte $1, 2, \cdots, \nu_0$ möglich. Es gilt also der Satz:

Die höchsten irregulären Einheitswurzeln vom Logarithmus Null, die in einem Körper von der Primteilerordnung $e = e_0 p^{\nu_0-1}(p-1)$ auftreten können, sind die $p^{\nu_0}$-ten.

Aus dem obigen Kriterium ergibt sich zunächst eine sehr einfache Bedingung für die Existenz der $p$-ten Einheitswurzeln:

In $K(\mathfrak{p})$ existieren stets und nur dann die $p$-ten Einheitswurzeln, wenn sowohl $e$ als $\mathrm{Ind}(-p)$ durch $(p-1)$ teilbar sind, wenn also

(11) $$(-p) = \pi^{e^{(0)}(p-1)} w^{g^{(0)}(p-1)} + \cdots$$

in $K(\mathfrak{p})$ eine $(p-1)$-te Potenz ist.

Ist nämlich $(-p) = \pi^e w^g + \cdots = \pi^{e^{(0)}(p-1)} w^{g^{(0)}(p-1)} + \cdots$, so ist $\eta^{(e^0)} = 1 + \pi^{e^{(0)}} w^{g^{(0)}}$ eine irreguläre Einseinheit vom Grade $r = \dfrac{e}{p-1}$, ihre Logarithmenordnung liegt also nach S. 182 oberhalb $r = e^{(0)} = \dfrac{e}{p-1}$. Also ist

$$\omega_1 = \frac{1 + \pi^{e^{(0)}} w^{g^{(0)}}}{e^{\log\left(1+\pi^{e^{(0)}} w^{g^{(0)}}\right)}} = 1 + \pi^{e^{(0)}} w^{g^{(0)}} + \pi^{e^{(0)}+n} w_n + \cdots$$

eine Einseinheit vom Logarithmus 0. $\omega_1^p$ ist sicher von höherem als $r$-tem Grade, besitzt daher als Exponentialeinheit vom Logarithmus 0 den Wert 1. Folglich ist $\omega_1$ in der Tat eine $p$-te Einheitswurzel. Entsprechend läßt sich aus

$$\eta_a^{(e^{(0)})} = 1 + \pi^{e^{(0)}} w^{g^{(0)}} a \qquad \text{für } a = 1, 2, \ldots, p-1$$

je eine $p$-te Einheitswurzel herleiten, so daß mit der 1 zusammen genau $p$ $p$-te Einheitswurzeln in $K(\mathfrak{p})$ enthalten sind.

In § 1, S. 185 ist gezeigt, daß ein Körper, in dem sowohl $e$ als $\mathrm{Ind}(-p)$ durch $(p-1)$ teilbar sind, irregulär ist, also kann man den obigen Satz auch so aussprechen:

In einem regulären Körper existieren keine Einheitswurzeln, deren Exponent eine Potenz von $p$ ist, also vollzieht sich dort der Übergang vom Logarithmus zum Numerus stets eindeutig. In jedem irregulären Körper dagegen existieren mindestens die $p$-ten Einheitswurzeln.

Ich untersuche jetzt mit Hilfe desselben Kriteriums die Existenz der $p^2$-ten Einheitswurzeln. Da jede $p^2$-te Einheitswurzel zugleich eine $p$-te ist, müssen selbstverständlich die obigen Bedingungen erfüllt sein. Darüber hinaus ist notwendig, daß $e$ mindestens durch $p$ teilbar ist, denn der Grad einer primitiven $p^2$-ten Einheitswurzel muß die Form $e^{(1)} = \dfrac{e}{p(p-1)}$ besitzen; es sei

(12 a) $$e = e_0 p^{\nu_0-1}(p-1) = e^{(1)} p(p-1), \quad \text{wo } \nu_0 > 1 \text{ ist.}$$

Da $\mathrm{Ind}(-p)$ nur modulo $(p'-1)$ bestimmt ist, kann man ihm die entsprechende Form

(12 b) $$g = g_0 p^{\nu_0 - 1}(p-1) = g^{(1)} p(p-1)$$

geben.

Setzt man zur Abkürzung

$$\pi^{e^{(1)}} w^{g^{(1)}} = \Pi_1,$$

so daß also $\Pi_1$ einer $p(p-1)$-ten Wurzel aus $(-p)$ äquivalent ist, so ist

(13) $$\eta_1 = 1 + \pi^{e^{(1)}} w^{g^{(1)}} = 1 + \Pi_1$$

eine irreguläre Einseinheit vom Diagrammtypus III, bei der die beiden Endglieder der wagerechten Sehne sich fortheben. Es fragt sich nun, unter welcher Bedingung eine zu $1 + \Pi_1$ äquivalente Einseinheit bestimmt werden kann, deren Logarithmenordnung in bezug auf $\pi$ oberhalb $r$, also in bezug auf $\Pi_1$ oberhalb $\frac{r}{e^{(1)}} = p$ liegt. Wegen $(-p) \sim \Pi_1^{p(p-1)}$ kann man ansetzen

$$-p = \Pi_1^{p(p-1)}(1 + \Pi_1^x w_x \xi_1),$$

wo $\xi_1$ wieder eine Einseinheit bedeutet, denn es leuchtet ein, daß diejenigen Entwicklungsglieder von $(-p)$, die in den $p$-ten Näherungswert von $\log(1+\Pi_1)$ eingehen, auch nur von $\Pi_1$ abhängen können, wenn dieser verschwinden soll. Dann enthält die logarithmische Reihe

(14) $$L = \log(1+\Pi_1) = \Pi_1 - \frac{\Pi_1^2}{2} \pm \cdots - \frac{\Pi_1^p}{\Pi_1^{p(p-1)}\left(1+\Pi_1^x w_x \xi_1\right)} \pm \cdots + \frac{\Pi_1^{p^2}}{\Pi_1^{2p(p-1)}\left(1+\Pi_1^x w_x \xi_1\right)^2} \mp \cdots$$

für $p > 2$ folgende von $x$ freie Ordnungszahlen unterhalb $p+1$:

(15) $$\begin{cases} 1) & ip - p(p-1) & \text{für } i = 2, 3, \ldots, p-1, \\ 2) & i & \text{für } i = 1, 2, \ldots, p-1. \end{cases}$$

Die niedrigste unter ihnen ist $2p - p(p-1)$ von dem Gliede $\frac{-\Pi_1^{2p}}{2p} = +\frac{\Pi_1^{2p-p(p-1)}}{2} \mp \cdots$. Dazu läßt sich nach Formel (2) und (3) dieses Paragraphen stets ein Zusatzlogarithmus

$$l_2 = \log\left(1 - \frac{\Pi_1^2}{2}\right)$$

mit demselben Anfangsglied

$$+\left(\frac{-\Pi_1^2}{2}\right)^p \frac{1}{p} \equiv \frac{-\Pi_1^{2p-p(p-1)}(-1)^p}{2^p} \equiv +\frac{\Pi_1^{2p-p(p-1)}}{2} \pmod{\Pi_1}$$

bestimmen, so daß die Differenz $L - l_2$ diese Ordnungszahl nicht mehr enthält. Da $l_2$ keine anderen Ordnungszahlen enthält als $L$, und da die Differenz der beiden Glieder der Ordnung $2p - p(p-1)$ wegen $2^p \equiv 2 \pmod{p}$ mindestens die Ordnung $2p - p(p-1) + p(p-1) = 2p > p$ besitzt, so hat das niedrigste von $x$ freie Glied der Differenz $L - l_2$ die Form $\frac{-\Pi_1^{3p-p(p-1)}}{3}$. Auch dieses läßt sich

durch einen Zusatzlogarithmus

$$l_3 = \log\left(1 + \frac{\Pi_1^3}{3}\right)$$

zum Verschwinden bringen. Das von $x$ freie Anfangsglied der neuen Differenz $L - l_2 - l_3$ mit der Ordnung $4p - p(p-1)$ besitzt einen Koeffizienten, der sich aus denjenigen der in $L$ und $l_2$ auftretenden Glieder dieser Ordnung zusammensetzt; aber auch dazu läßt sich ein Zusatzlogarithmus

$$l_4 = \log\left(1 - \frac{\Pi_1^4}{8}\right)$$

angeben, der es zum Verschwinden bringt. Auf diese Weise fortfahrend erhält man einen Logarithmus

$$L - l_2 - l_3 - \cdots l_{p-1}, \tag{16}$$

der keine Ordnungszahlen der Form $ip - p(p-1)$ mehr enthält.

Aber auch von den Gliedern $i$-ter Ordnung ist nur noch das erste vorhanden, wie man aus der Form der Zusatzlogarithmen leicht erkennt. Dieses Glied $\Pi_1$ kann nun weder durch einen irregulären noch durch einen regulären Zusatzlogarithmus beseitigt werden. Da nämlich die gesuchte Einseinheit zu $1 + \Pi_1$ äquivalent sein soll, käme als irregulärer Zusatzlogarithmus nur $\log(1 + \pi^{e^{(0)}} w^{\vartheta^{(0)}}) = \log(1 + \Pi_1^p)$ in Frage; dessen Ordnungszahl ist aber größer als $p$, also sicher nicht gleich 1. Für einen regulären Zusatzlogarithmus hingegen liefert die Berechnung des Grades nach S. 186 Formel (2)

$$k = \frac{1 + p(p-1)}{p},$$

also keinen ganzzahligen Wert; folglich existiert sicher kein Zusatzlogarithmus, der eine Funktion von $\Pi_1$ ist, sondern höchstens einer, der von $\Pi_1^{\frac{1}{p}} = \pi^{e^{(2)}} w^{\vartheta^{(2)}} = \Pi_2$ abhängt. Dadurch würde aber sicher ein Glied $\Pi_2$ mit einer Ordnung unterhalb $r + 1$ auftreten, zu dessen Beseitigung ein von $\Pi_2^{\frac{1}{p}} = \Pi_3$ abhängiger Zusatzlogarithmus gewählt werden müßte u. s. f., bis ein von $\Pi_{\nu_0} = \pi^{\frac{1}{p}}$ abhängiger Zusatzlogarithmus erforderlich wäre, der also in bezug auf $\pi$ selbst keinen ganzzahligen Grad mehr besitzen könnte.

Also läßt sich nur dann die Ordnungszahl von $L$ in bezug auf $\Pi_1$ über $p$ hinaus erhöhen, wenn das Glied $\Pi_1$ überhaupt nicht auftritt. Das ist nur dadurch möglich, daß es sich gegen ein Glied forthebt, das von den höheren Entwicklungsgliedern von $-p$, also von $x$ abhängt. Das niedrigste von $x$ abhängige Glied kommt in den beiden Eckpunkten der wagerechten Diagrammsehne vor, also in

$$\frac{\Pi_1^p}{p} = -\Pi_1^{p-p(p-1)}(1 - \Pi_1^x w_x \xi_1 \pm \cdots) \quad \text{und}$$

$$\frac{\Pi_1^{p^2}}{p^2} = +\Pi_1^{p^2-2p(p-1)}(1 - 2\,\Pi_1^x w_x \xi_1 \pm \cdots).$$

Folglich hat es den Wert $-\Pi_1^{p-p(p-1)+x} w_x$, also muß sein

$$p - p(p-1) + x = 1 \qquad \text{oder} \qquad x = p(p-1) - (p-1) = (p-1)^2$$

und

$$w_x = 1.$$

Für diesen Wert von $x$ werden alle übrigen Glieder, die $x$ enthalten, von höherer als $p$-ter Ordnung.

Daß die Entwicklung der zu $(-p)$ gehörigen Einseinheit keine Glieder unterhalb $\Pi_1^{(p-1)^2}$ enthalten darf, erkennt man folgendermaßen: Besäße $(-p)$ auch nur ein solches Glied $\Pi_1^y w_y$, so hätte die niedrigste von $\mathfrak{p}$ abhängige Ordnungszahl von $\log(1+\Pi_1)$ die Form $p - p(p-1) + y$. Das zugehörige Glied läßt sich aber nur dann erst durch einen Zusatzlogarithmus des Grades $k = \dfrac{p - p(p-1) + y + p(p-1)}{p}$ beseitigen, wenn $y = (i-1)p$ durch $p$ teilbar ist. Dann hat die Ordnungszahl den Wert $ip - p(p-1)$; der Koeffizient des Zusatzlogarithmus $\bar{l}_i = \log(1 + \Pi_1^i w^{s_i})$ bestimmt sich also nicht aus einer solchen Kongruenz, wie sie im vorhergehenden geschildert ist, sondern hängt noch von $w_y$ ab. Dann verschwindet aber in $L - \bar{l}_i$ das Glied $\Pi_1^i$ nicht mehr. Es kann auch nicht durch einen neuen Zusatzlogarithmus fortgeschafft werden, denn $k = \dfrac{i + p(p-1)}{p}$ ist nicht ganzzahlig. Also darf in der Entwicklung von $(-p)$ kein Glied unterhalb $\Pi_1^{(p-1)^2}$ vorkommen.

Man kann daher für jede ungerade Primzahl das Ergebnis aussprechen:

In einem $\mathfrak{p}$-adischen Körper existieren stets und nur dann die $p^2$-ten Einheitswurzeln, wenn

$$(17) \qquad -p = \pi^e w^g (1 + \pi^{e^{(1)}(p-1)^2} w^{g^{(1)}(p-1)^2} \xi_1) = \Pi\,(1 + \frac{\Pi}{\Pi_1^{p-1}}\,\xi_1)$$

ist. Darin ist zur Abkürzung

$$\Pi = \pi^e w^g \backsim (-p), \quad \text{und} \quad \Pi_1 = \pi^{e^{(1)}} w^{g^{(1)}} \backsim \sqrt[p(p-1)]{-p}$$

gesetzt, und $\xi_1$ bedeutet eine beliebige Einseinheit.

Eine Ausnahme kann nur für $p = 2$ eintreten. Hier kommen in $\log(1+\Pi_1)$ nur zwei von $x$ freie Glieder mit Ordnungen unterhalb $p+1 = 3$ vor, nämlich $\dfrac{\Pi_1}{1}$ mit der Ordnung 1 und $-\dfrac{\Pi_1^8}{2^3}$ mit der Ordnung $8 - 3 \cdot 2 = 2$. Das Glied $\Pi_1$ kann nicht durch einen Zusatzlogarithmus beseitigt werden, was genau wie für $p > 2$ bewiesen wird. Also muß zunächst genau wie dort

$$-2 = \Pi\,(1 + \Pi_1^{(p-1)^2}\,\xi_1) = \Pi\,(1 + \Pi_1 \xi_1) = \Pi_1 + \Pi_1^2 \xi_1$$

sein. Für das Glied $\Pi_1^2$ ergibt sich für den Grad des Zusatzlogarithmus der Wert $k = \dfrac{2+2}{2} = 2$; also muß er ein Diagramm vom Typus III besitzen. Die zugehörige Indexkongruenz

$$w_1 + w_1^2 \equiv 1 \pmod{\Pi_1}$$

ist lösbar, wenn in $K(\mathfrak{p})$ die dritten Einheitswurzeln existieren, denn für diese ist $1 + w_1 + w_1^2 = 0$. Dazu muß $p^f - 1$ durch 3 teilbar sein, und das tritt stets und nur dann ein, wenn $f$ gerade ist, denn es ist $2^f \equiv (-1)^f \pmod 3$. Für ungerades $f$ dagegen ist diese Indexkongruenz nicht lösbar, denn ist $w_1$ eine $m$-te Einheitswurzel und $m$ nicht durch 3 teilbar, so folgt aus dem Bestehen der Kongruenz

$$1 + w_1 + w_1^2 + \cdots + w_1^{m-1} \equiv 0 \pmod{\Pi_1}$$

die Unmöglichkeit der dreigliedrigen Kongruenz derselben Art. Also existiert in solchen Körpern kein Zusatzlogarithmus, der das Glied $\Pi_1^2$ zum Verschwinden bringt, sondern $(-2)$ muß in diesem Falle die Form besitzen

$$-2 = \Pi(1 + \Pi_1 + \Pi_1^2 \xi_1) = \Pi_1^2 + \Pi_1^3 + \Pi_1^4 \xi_1,$$

wie eine leichte Rechnung ergibt. Man erhält also den Zuastz:

In einem dyadischen Körper, dessen Primteilernorm durch eine ungerade Potenz von 2 teilbar ist, existieren stets und nur dann die $2^2$-ten Einheitswurzeln, wenn

$$(18) \qquad -2 = \Pi(1 + \Pi_1 + \Pi_1^2 \xi_1) = \pi^e w^g + \pi^{\frac{3e}{2}} w^{\frac{3g}{2}} + \pi^{2e} w^{2g} \xi_1$$

ist, wo $\xi_1$ eine beliebige Einseinheit bedeutet.

So existieren z. B. in dem quadratischen Zahlkörper $K(1-i)$, für den $e = 2$ und $f = 1$ ist, die 4ten Einheitswurzeln, weil $(-2) = \dfrac{\pi^2}{1-\pi} = \pi^2 + \pi^3 + \pi^4 + \cdots$ die obige Form hat, in dem quadratischen Körper $K(1 - \sqrt{3})$ dagegen nicht, weil darin $(-2) = \dfrac{\pi^2}{-1-\pi} \equiv \pi^2 + \pi^3 \pmod 5$ ist, also kein Glied der Form $\pi^4 w^{2g}$ besitzt [1]).

Die allgemeine Untersuchung der Existenzbedingungen für die $p^n$-ten Einheitswurzeln läßt sich ganz entsprechend durchführen und führt zu dem Ergebnis:

In einem $\mathfrak{p}$-adischen Körper, dessen Primzahl oberhalb $n$ liegt, existieren stets und nur dann die $p^n$-ten Einheitswurzeln, wenn

$$(19) \qquad -p = \Pi\left(1 + \frac{\Pi}{\Pi_1^{p-1}} - \frac{\Pi^2}{\Pi_2^{p^2-1}} \pm \cdots + \frac{(-1)^n \cdot \Pi^{n-1}}{\Pi_{n-1}^{p^{n-1}-1}} \xi_1\right)$$

ist. Darin ist zur Abkürzung

$$(19\,a) \qquad \Pi = \pi^e w^g \backsim (-p),$$

$$(19\,b) \qquad \Pi_i = \pi^{e^{(i)}} w^{g^{(i)}} = \pi^{\frac{e}{p^i(p-1)}} w^{\frac{g}{p^i(p-1)}} \backsim \sqrt[p^i(p-1)]{-p} \quad (\text{für } i = 1, \ldots, n-1)$$

gesetzt, und $\xi_1$ bedeutet eine beliebige Einseinheit.

Zum Beweise zeigt man ganz entsprechend wie im Falle $n = 2$, daß dann in der Reihe

$$(20) \qquad \overset{(n-1)}{L} = \log(1 + \Pi_{n-1}) = \Pi_{n-1} - \frac{\Pi_{n-1}^2}{2} + \frac{\Pi_{n-1}^3}{3} \mp \cdots$$

das Glied der niedrigsten Ordnung

---

[1]) H. I, § 5.

**Mathematische Unterrichtsbriefe.** Zur Einführung in das Studium der höheren Mathematik. Mit bes. Rücksicht a. d. Selbstunterricht. Von August Schuster.
I. Band. Mit zahlr. Beisp. und Übungsaufg. und einem Anh. mit den ausführl. Lösungen derselben. Mit 52 Fig. Gr.-Okt. VI, 294 S. 1918. 4.—, geb. 5.—
II. Band. Übungsbuch. Gr.-Okt. IV, 288 S. 1922. 4.—, geb. 5.—

**Mathemathische Mußestunden.** Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Prof. Dr. Hermann Schubert. 4. Aufl., neu bearb. v. Prof. Dr. F. Fitting, München-Gladbach. Oktav. 245 Seiten. 1924. Geb. 6.—

**Einführung in die Determinantentheorie** einschl. der Fredholmschen Determinanten. Von Prof. Dr. Gerh. Kowalewski. 2., verkürzte Aufl. Gr.-Okt. IV, 304 S. 1925. 14.—, geb. 15.50

**Vektoranalysis** in ihren Grundzügen und wichtigen physikalischen Anwendungen. Von Dr. Arth. Haas, Prof. an der Universität Wien. Mit 37 Abb. im Text. Groß-Oktav. VI, 149 Seiten. 1922. 4.—, geb. 4.80

**Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage.** Von Dr. Ludwig Schlesinger, o. Prof. a. d. Univ. Gießen. Gr.-Okt. VIII, 326 S. 1922. 10.—, geb. 11.—

**Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.** Von Heinr. W. E. Jung, Prof. a. d. Univ. Halle-Wittenberg. Mit 35 Abb. im Text. Gr.-Okt. VI, 246 S. 1923. 7.—, geb. 8.—

**Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen.** Von Prof. Dr. A. Wangerin in Halle a. S.
I. Tl. M. 46 Fig. VIII, 255 S. Unver. Neudr. 1922. *(Samml. Schubert Bd. 58.)* Geb. 8.—
II. Tl. Mit 17 Fig. VIII, 286 S. 1921. *(Samml. Schubert Bd. 59.)* Geb. 8.—

**Nichteuklidische Geometrie.** Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. 3. Auflage. 150 Seiten. 1923. 6.—, geb. 7.—

**Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.** Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Charlottenburg.
I. Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume. Mit 107 Fig. 3., verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923. 13.—, geb. 14.50
II. Einführung in die Theorie der Flächen. Mit 110 Figuren. 3., verbesserte Auflage. XI, 582 Seiten. 1922. 15.—, geb. 16.50

**Darstellende Geometrie.** Von Th. Schmid, o. ö. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Wien.
I. Tl. 3. Aufl. Mit 170 Fig. 283 S. 1922. *(Samml. Schubert, Bd. 65.)* Geb. 6.—
II. Tl. 2. Aufl. Mit 163 Fig. 340 S. 1923. *(Samml. Schubert, Bd. 66.)* Geb. 7.50

**Taschenbuch für prakt. Geometrie.** Von Dr. H. Löschner, Prof. a. d. Deutsch. Techn. Hochsch. Brünn. Mit 10 Fig. i. Text. Kl.-Okt. X, 147 S. 1922. Geb. 3.—

**Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung.** Von Professor Dr. Johannes Tropfke, Direktor der Kirschner-Oberrealschule zu Berlin. 2., verbesserte und sehr vermehrte Auflage. Lexikon-Oktav.
1. Band: Rechnen. VII, 177 Seiten. 1921. 7.20, geb. 8.20
2. Band: Allgem. Arithmetik. IV, 221 Seiten. 1921. 8.50, geb. 9.50
3. Band: Proportionen, Gleichungen. IV, 151 Seiten. 1922. 6.—, geb 7.—
4. Band: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 1922. 9.—, geb. 10.—
5. Band: I. Ebene Trigonometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 1923. 7.50, geb. 8.50
6. Band: Analysis. Analytische Geometrie. IV, 169 S. 1924. 7.—, geb. 8.—
7. Band: Stereometrie, Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 1924. 6.50, geb. 7.50

**Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren.** Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzenden Ganesh Prasad. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Friedrich Lange. Groß-Oktav. 37 Seiten. 1921. 0.80

---

**WALTER DE GRUYTER & CO. ** BERLIN W. 10 UND LEIPZIG**

# GÖSCHENS LEHRBÜCHEREI

Mit diesem Unternehmen bezwecken wir eine Sammlung von ausgesprochenen Lehrbüchern aus den Gebieten der Mathematik, der exakten Naturwissenschaften und der Technik, die wissenschaftliche Gründlichkeit, leichte Verständlichkeit und klaren Aufbau in sich vereinen soll. Diese Lehrbücher sind vor allem bestimmt für Studierende der Universitäten und technischen Hochschulen, für Lehramtskandidaten und Lehrer mittlerer und höherer Schulen, zur Benutzung an Lehrerseminaren sowie für das Selbststudium gleichartig vorgebildeter Leser. Jeder Band soll ungefähr den Inhalt einer einsemestrigen Vorlesung umfassen.

*Zunächst ist erschienen:* GRUPPE I: REINE MATHEMATIK

**Bachmann,** Professor Dr. Paul, Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Mit 10 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Oktav. XV, 246 Seiten. *(Bd. 3.)* M. 8.50, geb. M. 9.50

**Fueter,** Dr. Rudolf, Professor an der Universität Zürich, Synthetische Zahlentheorie. Neue Ausgabe. Oktav. VIII, 271 Seiten. *(Bd. 4.)* M. 8.80, geb. M. 9.80

**Perron,** Dr. O., Professor an der Universität Heidelberg, Irrationalzahlen. Oktav. VIII, 186 Seiten. *(Bd. 1.)* M. 6.—, geb. M. 7.—

**Runge,** Dr. C., Professor an der Universität Göttingen, Praxis der Gleichungen. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Oktav. V, 172 Seiten. *(Bd. 2.)* M. 6.—, geb. M. 7.—

**Schlesinger,** Dr. Ludwig, o. Professor an der Universität Gießen, Automorphe Funktionen. Oktav. X, 205 Seiten. *(Bd. 5.)* M. 8.—, geb. M. 9.20

Die Sammlung wird fortgesetzt

**WALTER DE GRUYTER & CO. ⁎ BERLIN W. 10 UND LEIPZIG**

**Einführung in die theoretische Physik.** In zwei Bänden von Dr. Clemens Schaefer, o. ö. Prof. der Physik an der Universität Marburg. Erster Band: Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper und Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydrodynamik). Mit 249 Figuren im Text. Zweite, unveränderte Auflage. 1922. Gr.-Okt. XII, 925 S. M. 23.—, geb. M. 25. — Zweiten Bandes erster Teil: Theorie der Wärme, Molekular-Kinetische Theorie der Materie. Mit 71 Fig. im Text. 1921. Gr.-Okt. X, 562 S. M. 15.—, geb. M. 16.20 Zweiten Bandes zweiter Teil: Erscheint Anfang 1925. Jeder Band ist in sich abgeschlossen.

Die Tiefe und Klarheit, mit der Schaefer die Wärmetheorie und die kinetische Gastheorie bearbeitet, wie er aus den grundlegenden Bearbeitungen von Kirchhoff, Helmholtz, Boltzmann, Planck und anderen, welchen wir gleichzeitig grundlegende physikalische Ideen und mathematische Schärfe zu verdanken haben, das Wesentliche zusammenstellt und mit Takt auswählt, verdient größte Anerkennung und wird dem Verfasser den Dank von Lehrern und Studierenden sichern. *Zeitschrift für physik. Chemie.*

Ferner erschien in unserem Verlage:

**Die Prinzipe der Dynamik.** Von Dr. Clemens Schaefer. Mit 6 Figuren im Text. 1919. Oktav. IV, 76 Seiten. M. 2.50

Das Buch bietet auf kleinem Raume eine Fülle bedeutsamen Stoffes. Dabei ist die Darstellung auch im einzelnen von einer bewundernswerten Einfachheit und Verständlichkeit. *Zeitschr. f. Elektrochemie.*

**WALTER DE GRUYTER & CO. ⁎ BERLIN W. 10 UND LEIPZIG**

NOV 26

R.R.3

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

**Schäfer, Schlesinger, Schottky**

von

**K. Hensel.**

## Band 154.

Heft 4.

Ausgegeben den 15. Oktober

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1925

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

# Band 154. Heft 4.

## Inhaltsverzeichnis.


**Hasse, Helmut,** Das allgemeine Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste für beliebige, zu $l$ prime Zahlen in gewissen Oberkörpern des Körpers der $l$-ten Einheitswurzeln . . . . . Seite 199

**Hasse, Helmut,** Der zweite Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste für beliebige zu $l$ prime Zahlen in gewissen Oberkörpern des Körpers der $l$-ten Einheitswurzeln . . . . . — 215

**v. Neumann, J.,** Eine Axiomatisierung der Mengenlehre . . . . . — 219

**Schilling, B.,** Eine neue Bestimmung aller Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene . . . . . — 241

**Reidemeister, Kurt,** Eine Kennzeichnung der Kugel nach *W. Blaschke* . . — 260


### *An unsere Mitarbeiter!*

*Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.*

*Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.*


Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

# Das allgemeine Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste für beliebige, zu $l$ prime Zahlen in gewissen Oberkörpern des Körpers der $l$-ten Einheitswurzeln.

Von *Helmut Hasse* in Halle.

In meiner früheren Arbeit [1]) habe ich das allgemeine Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste ($l$ ungerade Primzahl) für beliebige zu $l$ prime Zahlen im Körper $k_\zeta$ der $l$-ten Einheitswurzeln behandelt und gezeigt, wie sich dort der durch

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{\varphi(\alpha,\beta)}$$

bestimmte Exponent $\varphi(\alpha, \beta)$ des sog. Umkehrfaktors als Funktion der Zahlen $\alpha$ und $\beta$ ausdrückt. In dieser Arbeit will ich dieselbe Frage für gewisse Oberkörper $k$ von $k_\zeta$ in Angriff nehmen, nämlich solche, für die der Primteiler $\mathfrak{l} = (\lambda) = (1 - \zeta)$ von $l$ in $k_\zeta$ beim Übergang zu $k$ eine Zerlegung der Form

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \dots \mathfrak{l}_n; \quad (\mathfrak{l}_i \text{ vom Grade und Relativgrade } f_i)$$

erfährt, also die Relativordnungen der Primteiler $\mathfrak{l}_i$ von $\mathfrak{l}$ in $k$ sämtlich gleich 1 sind. Der Fall $l = 2$ darf hier beiseite gelassen werden, da ich bereits in einer früheren Arbeit [2]) das hierhergehörige Resultat vollständig hergeleitet habe. (R. G. I., S. 200).

Für die genannten Körper $k$ werde ich die obige Frage *vollständig*, d. h. *ohne eine andere einschränkende Voraussetzung* über $\alpha$ und $\beta$, als die naturgemäße: „$\alpha$, $\beta$ prim zu $l$ und kernprim zueinander" lösen.

Ohne Einschränkung darf dabei im folgenden stets die Bedingung: „$\alpha, \beta \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$" zugrunde gelegt werden. Denn hat man das Problem hierfür gelöst, und sind $\alpha$ $\beta$ zwei nur der ersten Bedingung unterworfene Zahlen, so ist doch

$$\alpha^{l^{f_1 \dots f_n - 1}} \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}; \qquad \beta^{l^{f_1 \dots f_n - 1}} \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$$

und der Umkehrfaktor $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$ gleich dem mit jenen Potenzen von $\alpha$, $\beta$ ge-

[1]) *H. Hasse*, Über das allgemeine Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste im Kreiskörper $k_\zeta$ der $l$-ten Einheitswurzeln und Oberkörpern von $k_\zeta$, ds. Journ. Bd. 154, S. 96 ff., im folgenden zitiert mit R. G. II.

[2]) *H. Hasse*, Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern für gewisse, nichtprimäre Zahlen, ds. Journ., Bd. 153, S. 192 ff, im folgenden zitiert mit R. G. I.

bildeten, so daß man nur in dem für den speziellen Fall gefundenen $\varphi(a, \beta)$ die Argumente $a$, $\beta$ durch jene Potenzen zu ersetzen hat, um die Formel des allgemeinen Falles zu erhalten.

Um die zu beweisende Formel anzugeben, sei $R_l$ der Körper der rationalen $l$-adischen Zahlen, $R_l(w_i)$ der durch eine primitive $(l^{f_i}-1)$-te Einheitswurzel $w_i$ bestimmte $l$-adische Körper $f_i$-ten Grades über $R_l$, der als Unterkörper (Koeffizientenkörper) in dem dem Primteiler $\mathfrak{l}_i$ entsprechenden $\lambda$-adischen Körper $k_{\mathfrak{l}_i}$ enthalten ist, und über dem $k_{\mathfrak{l}_i} = R_l(w_i, \zeta) = R_l(w_i, \lambda)$ zyklisch vom Grade $l-1$ ist. Ferner bezeichne $S_i$ die Spur von $R_l(w_i)$ nach $R_l$, $s_i$ die Relativspur von $k_{\mathfrak{l}_i}$ nach $R_l(w_i)$. Schließlich sei für $\gamma \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}$ unter $\log \gamma$ die für den Bereich von $\mathfrak{l}$, also auch von jedem $\mathfrak{l}_i$ konvergente, und daher einer bestimmten Zahl jedes $k_{\mathfrak{l}_i}$ gleiche $\lambda$-adische Reihe

$$\log \gamma = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (\gamma-1)^{\nu}$$

verstanden.

Dann werde ich beweisen:

*Für irgendzwei zueinander kernprime* $\alpha$, $\beta \equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{l}$ *aus* $k$ *gilt*:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{i=1}^{n} S_i \left\{ \sum_{x=1}^{l-1} x \frac{s_i(\zeta^{-x} \log \alpha)}{l} \cdot \frac{s_i(\zeta^{x} \log \beta)}{l} + s_i\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)^{l} \frac{s_i(\log \beta)}{l} - s_i\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right)^{i} \frac{s_i(\log \alpha)}{l} \right\}}$$

Um diese Formel *ohne* Verwendung der *Hensel*schen Begriffsbildungen anzugeben, ersetze man zunächst (s. R. G. II, Hilfssatz 1) $\log \alpha$ und $\log \beta$ durch die in $k$ liegenden, durch $\mathfrak{l}$ teilbaren Näherungswerte mod. $\mathfrak{l}^l$, d. h. modd. $\mathfrak{l}_1^l$, $\mathfrak{l}_2^l$, ..., $\mathfrak{l}_n^l$:

$$\sum_{\nu=1}^{l} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (\alpha-1)^{\nu}; \qquad \sum_{\nu=1}^{l} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (\beta-1)^{\nu}.$$

Dann bestimme man den in Frage kommenden Kongruenzwert der Ausdrücke $\frac{1}{l} s_i(\xi)$ mit durch $\mathfrak{l}$ teilbarem $\xi$ auf folgende Weise: Man wähle eine solche primitive Wurzel $\varrho_i$ mod. $\mathfrak{l}_i$, daß

$$\varrho_i^{l^{f_i}-1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_i^l,$$

und bestimme solche ganzen rationalen $c_{\mu\nu}$, daß

$$\xi \equiv \sum_{\mu=1}^{l-1} \lambda^{\mu} \sum_{\nu=0}^{f_i-1} c_{\mu\nu} \varrho_i^{\nu} \bmod \mathfrak{l}_i^l$$

ist. Dann ist

$$s_i(\xi) \equiv \sum_{\mu=1}^{l-1} s(\lambda^{\mu}) \sum_{\nu=0}^{f_i-1} c_{\mu\nu} \varrho_i^{\nu} \bmod l^2,$$

wo $s$ die Spur in $k_\zeta$ bezeichnet, also

$$\frac{1}{l} s_i(\xi) \equiv \sum_{\mu=1}^{l-1} \sum_{\nu=0}^{f_i-1} c_{\mu\nu} \varrho_i^{\nu} \bmod l.$$

Man ersetze also die Ausdrücke $\frac{1}{l} s_i(\xi)$ in obiger Formel durch die so gefundenen

$\sum_{\mu=1}^{l-1}\sum_{\nu=0}^{f_i-1} c_{\mu\nu}\varrho_i^\nu$. Um $s_i\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)^l$ zu erhalten, setze man

$$\alpha \equiv 1 - \left(\sum_{\nu=0}^{f_i-1} a_\nu \varrho_i^\nu\right)\lambda \bmod \mathfrak{l}_i^2$$

und dann für $s_i\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)^l$ den Ausdruck

$$\left(\sum_{\nu=0}^{f_i-1} a_\nu \varrho_i^\nu\right)^l \equiv \sum_{\nu=0}^{f_i-1} a_\nu \varrho_i^{\nu l} \bmod l,$$

und entsprechend bei $s_i\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right)^l$.

Die $S_i$ der so entstehenden ganzen rationalen Ausdrücke $\Phi_i(\varrho_i)$ mit rationalen Koeffizienten bilde man als die aus

$$S_i(\Phi_i(\varrho_i)) \equiv \sum_{\nu=0}^{f_i-1} \Phi_i(\varrho_i^{l^\nu}) \bmod l$$

bestimmte, ganze rationale Zahl.

Eine einfachere Regel zur Bestimmung von $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}$ ohne Verwendung der *Hensel*schen Begriffsbildungen, als die eben angegebene, sehr komplizierte, vermag ich im Falle eines allgemeinen Körpers $k$ der obigen Eigenschaften nicht zu geben, so daß mir die Begriffe der *Hensel*schen Theorie für die Darstellung des Reziprozitätsgesetzes nicht nur als der Natur der Sache am besten entsprechend, sondern auch geradezu unumgänglich erscheinen.

Nur wenn $k$ *Galois*sch ist, kann man die $s_i$ und $S_i$ mittels der Zerlegungsgruppen $\mathfrak{Z}_i$ und Trägheitsgruppen $\mathfrak{T}_i$ der Primteiler $\mathfrak{l}_i$ so erklären:

$S_i(\xi) = \Sigma\xi/\mathfrak{Z}_i$ = Summe der aus $\xi$ durch die Substitutionen von $\mathfrak{Z}_i$ entstehenden konjugierten,

$s_i(\xi) = \Sigma\xi/\mathfrak{T}_i$ = Summe der aus $\xi$ durch die Substitutionen von $\mathfrak{T}_i$ entstehenden konjugierten.

Es sei noch bemerkt, daß für den Fall, daß $\alpha$ Zahl des Unterkörpers $k_\zeta$ ist, die angegebenen Formel leicht in die in R. G. II, S. 109 für diesen Fall erhaltene übergeführt werden kann. Denn dann sind ja die auf $\alpha$ bezüglichen Spuren $s_i$ einfach die Spuren $s$ in $k_\zeta$, also rational, und können vor die $S_i$ und die $\sum_i$ treten, so daß man für den fraglichen Exponenten von $\zeta$ den Ausdruck bekommt:

$$\sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \frac{s(\zeta^{-\varkappa}\log\alpha)}{l} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i s_i(\zeta^\varkappa \log\beta)}{l} + s\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i s_i(\log\beta)}{l} - \frac{s(\log\alpha)}{l}\sum_{i=1}^{n} S_i s_i\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right)^l$$

$$\equiv \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \frac{s(\zeta^{-\varkappa}\log\alpha)}{l}\frac{S(\zeta^\varkappa\log\beta)}{l} + s\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)\frac{S(\log\beta)}{l} - \frac{s(\log\alpha)}{l} S\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right) \bmod l,$$

weil ja $\sum_{i=1}^{n} S_i s_i(\xi) = S(\xi)$ einfach die nach den Körpern $k_{\mathfrak{l}_i}$ zerlegte Gesamtspur $S$ von $\xi$ in $k$ ist, und im letzten Glied $s_i(\xi^l) \equiv (s_i(\xi))^l$ und $S_i(\xi^l) \equiv S_i(\xi) \bmod l$ benutzt werden darf.

Der Beweis obiger Formel verläuft ganz analog zu dem in R. G. II für $k_\zeta$ geführten. Die Hauptschwierigkeit liegt in der Gewinnung des Analogons zu der dort benutzten *Kummer-Hilbert-Takagi*schen Formel (2.), S. 97, die $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$ durch die *Kummer*schen logarithmischen Differentialquotienten ausdrückt. Hierzu erweist es sich als erforderlich, die Theorie dieser logarithmischen Differentialquotienten auf die hier zu betrachtenden Grundkörper $k$ zu verallgemeinern, was zunächst geschehen soll.

Wir betrachten dazu einen einzigen der Primteiler $\mathfrak{l}_i$ von $\mathfrak{l}$ in $k$, den wir mit $\mathfrak{l}_1$ bezeichnen und den zugehörigen *Hensel*schen *Körper* $k_{\mathfrak{l}_1}$. In diesem ist $\lambda = 1 - \zeta$ eine Primzahl und $R_l(w_1)$ der Koeffizientenkörper. $k_{\mathfrak{l}_1} = R_l(w_1, \zeta)$ ist zyklisch vom Grade $l - 1$ über $R_l(w_1)$ mit der erzeugenden Substitution $s = (\zeta \to \zeta^r)$, wo $r$ eine primitive $(l-1)$-te Einheitswurzel aus $R_l$ ist. Die Elemente von $R_l(w_1)$ sind bei $s$ und seinen Potenzen invariant.

Es sei nun $\alpha = \varphi(\zeta) \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_1$ irgendeine Einseinheit aus $k_{\mathfrak{l}_1}$ in irgendeiner Darstellung als rationale Funktion $\varphi$ von $\zeta$ mit Koeffizienten aus $R_l(w_1)$. Über die Funktion $\varphi(x)$ machen wir dabei nur folgende Voraussetzung: Es sei $\varphi(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ als Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen dargestellt und dabei die Zahlkoeffizienten von Zähler und Nenner so normiert, daß $g(x)$ und $h(x)$ ganzzahlige Funktionen in $R_l(w_1)$ sind, von denen mindestens eine primitiv ist. Dann soll für $x = \zeta$ der Nenner $h(\zeta)$ prim zu $\mathfrak{l}_1$ sein. Es muß also $h(x)$ das primitive sein, und wegen $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_1$ auch $g(\zeta)$ prim zu $\mathfrak{l}_1$ und $g(x)$ primitiv. Wegen

$$g(\zeta) \equiv g(1) \bmod \mathfrak{l}_1$$
$$h(\zeta) \equiv h(1) \bmod \mathfrak{l}_1$$

sind dann auch $g(1)$ und $h(1)$ prim zu $\mathfrak{l}_1$ und somit als Zahlen aus $R_l(w_1)$ zu $l$, und es ist

$$\varphi(1) = \frac{g(1)}{h(1)} \equiv \frac{g(\zeta)}{h(\zeta)} = \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_1,$$

also

$$\varphi(1) \equiv 1 \bmod l.$$

Wir ordnen nun $\alpha$ die Funktion $\varphi(e^v)$ zu, wobei wir $v$ auf solche Argumente von $R_l(w_1)$ beschränken, für die die Exponentialreihe

$$e^v = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{v^\nu}{\nu!} \quad (l)$$

konvergiert. Nach den Ergebnissen von Herrn *Hensel*[1]) ist dies wegen $l \neq 2$ für alle $v$ der durch $v \equiv 0 \bmod l$ bestimmten Umgebung von $v = 0$ aus $R_l(w_1)$ der Fall. Für alle diese $v$ ist wegen

$$e^v \equiv 1 \bmod l, \qquad h(e^v) \equiv h(1) \bmod l$$

---

[1]) *K. Hensel*, Die Exponentialdarstellung der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers für den Bereich eines Primdivisors, *Schwarz*-Festschrift, Berlin 1914, S. 63/64.

der Nenner $h(e^v)$ von $\varphi(e^v)$ prim zu $l$, also sicher von Null verschieden, so daß $\varphi(e^v)$ für alle diese $v$ definiert ist. Weiter ist dann

$$\varphi(e^v) = \frac{g(e^v)}{h(e^v)} \equiv \frac{g(1)}{h(1)} \equiv \varphi(1) \equiv 1 \mod l,$$

weil $h(e^v)$ und $h(1)$ prim zu $l$ sind. Daher ist für alle jene $v$ die logarithmische Entwicklung

$$(1.) \qquad \log \varphi(e^v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (\varphi(e^v) - 1)^\nu \quad (l)$$

konvergent [1]) und läßt sich für die Umgebung von $v = 0$ in die Form

$$(2.) \qquad \log \varphi(e^v) = \sum_{a=0}^{\infty} c_a \frac{v^a}{a!} \quad (l)$$

setzen, wobei die Entwicklungskoeffizienten sich aus

$$(3.) \qquad c_a = \frac{d^a}{dv^a} [\log \varphi(e^v)]_{v=0} \; ; \qquad (a = 0, 1, 2, \ldots)$$

berechnen lassen. Wir beweisen zunächst:

*Satz* 1. *Die Koeffizienten $c_a$ der Entwicklung* (2.) *sind ganze Zahlen von $R_l(w_1)$.*

*Beweis*: Durch einmalige Differentiation von (1.) entsteht

$$\frac{d \log \varphi(e^v)}{dv} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} (\varphi(e^v) - 1)^{\nu-1} \varphi'(e^v) e^v \; (l),$$

wo also die Nenner $\nu$ weggefallen sind. Durch weitere Differentiation entstehen rechts unter der $\sum_\nu$ nur ganze rationale Ausdrücke mit ganzzahligen Koeffizienten in $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$, ... und $e^v$. Da $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$, ... nur Potenzen des Nenners $h(e^v)$ von $\varphi(e^v)$ zum Nenner haben, und $h(1)$, wie gezeigt, prim zu $l$ ist, werden für $v = 0$ alle jene Differentialquotienten ganze Zahlen aus $R_l(w)$, ebenso natürlich auch $e^0 = 1$, und somit die Koeffizienten (3.) für $a = 1, 2, 3, \ldots$. Daß endlich auch $c_0$ ganz ist, ist trivial, weil

$$c_0 = [\log \varphi(e^v)]_{v=0} = \log \varphi(1) \equiv 0 \mod l$$

ist.

Weiterhin gilt:

*Satz* 2. *Die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_{l-2}$ der Entwicklung* (2.) *sind mod. $l$ unabhängig von der speziellen Darstellung*

$$\alpha = \varphi(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{h(\zeta)}$$

*der Zahl $\alpha \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}_1$ durch eine rationale Funktion $\varphi(\zeta)$, die der oben genannten Bedingung genügt. Der Koeffizient $c_{l-1}$ vermehrt sich um $\frac{\varphi(1) - \psi(1)}{l}$, wenn $\varphi$ durch $\psi$ ersetzt wird.*

*Beweis*: Sei $\psi$ eine zweite rationale Funktion der genannten Eigenschaften.

---

[1]) *K. Hensel*, Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für den Bereich eines beliebigen Primteilers, ds. Journ. Bd. 145, S. 92 ff.

Dann ist

$$\frac{\psi(\zeta)}{\varphi(\zeta)} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \quad (l)$$

und daher wegen der Irreduzibilität der $k_l$, über $R_l(w_1)$ definierenden Grundgleichung

$$f(x) = x^{l-1} + x^{l-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

in $R_l(w_1)$:

$$(4.) \qquad \frac{\psi(e^v)}{\varphi(e^v)} = 1 + \chi(e^v) f(e^v),$$

wo $\chi(x)$ eine mod. $f(x)$ ganze, rationale Funktion mit Koeffizienten aus $R_l(w_1)$ ist. Wie man mittels des verallgemeinerten *Gauß*schen Satzes über primitive Polynome leicht bestätigt hat $\chi$, wenn man es in der gleichen Weise, wie oben $\varphi$, als Quotient zweier ganzen rationalen, in $R_l(w_1)$ ganzzahligen Funktionen darstellt, auf Grund der Voraussetzungen über $\varphi$ und $\psi$ für $v = 0$ einen zu $l$ primen Nenner, so daß $\chi, \chi', \chi'', \ldots$ für $v = 0$ ganze Zahlen aus $R_l(w_1)$ sind. Die rechte Seite von (4.) ist für alle $v$ der oben angegebenen Umgebung von $v = 0$ kongruent 1 mod. $l$, weil die linke es ist, und daher besteht unter Anwendung der Funktionalgleichung des Logarithmus die Entwicklung:

$$(5.) \qquad \log \psi(e^v) - \log \varphi(e^v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \{\chi(e^v) f(e^v)\}^\nu \quad (l)$$

und nach einmaliger Differentiation von (5.):

$$(6.) \quad \frac{d}{dv} \log \psi(e^v) - \frac{d}{dv} \log \varphi(e^v)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \{\chi(e^v) f(e^v)\}^{\nu-1} \{\chi'(e^v) f(e^v) + \chi(e^v) f'(e^v)\} e^v \quad (l).$$

Die rechten Seiten von (5.) und (6.) lassen sich wieder in der Umgebung von $v = 0$ nach steigenden Potenzen von $v$ entwickeln, wobei die Koeffizienten von $\frac{v^a}{a!}$ durch $a$-malige Differentiation von (5.) bzw. für $a \geqq 1$ durch $(a-1)$-malige Differentiation von (6.) und Nullsetzung von $v$ gewonnen werden können.

Um die Koeffizienten von $\frac{v}{1!}, \ldots, \frac{v^{l-1}}{(l-1)!}$ in (5.), d. h. die von $1, v, \ldots, \frac{v^{l-2}}{(l-2)!}$ in (6.) mod. $l$ direkt zu bestimmen, denken wir uns in (6.) $f, f', \chi, \chi'$ nach Potenzen von $v$ entwickelt. Nach der Bemerkung über $\chi$ sind die Koeffizienten von $1, v, \ldots, \frac{v^{l-1}}{(l-1)!}$ in diesen vier Entwicklungen ganze Zahlen von $R_l(w_1)$. Speziell gilt für $f$:

$$(7.) \quad f(e^v) = \sum_{i=0}^{l-1} e^{iv} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{v^\mu}{\mu!} \sum_{i=0}^{l-1} i^\mu \equiv -\frac{v^{l-1}}{(l-1)!} + \sum_{\mu=l}^{\infty} \frac{v^\mu}{\mu!} \sum_{i=0}^{l-1} i^\mu \mod l,$$

wobei die Kongruenz mod. $l$ das Übereinstimmen entsprechender Koeffizienten rechts und links mod. $l$ bedeutet; denn es ist ja

$$\sum_{i=0}^{l-1} i^\mu \equiv \begin{cases} 0 \mod l, & \text{wenn } \mu = 0, 1, \ldots, l-2, \\ -1 \mod l, & \text{wenn } \mu = l-1. \end{cases}$$

Durch Differentiation von (7.) folgt weiter

$$f'(e^v) \equiv -\frac{v^{l-2}}{(l-2)!} + \sum_{\mu=l-1}^{\infty} \frac{v^\mu}{\mu!} \sum_{i=0}^{l-1} i^{\mu+1} \mod l.$$

Um daher in (6.) die Koeffizienten von $1, v, \ldots, \frac{v^{l-2}}{(l-2)!}$ mod. $l$ zu finden, darf man, wegen der Ganzheit der Nenner $1!, \ldots, (l-1)!$ für den Bereich von $l$ an Stelle von $f(e^v)$ bzw. $f'(e^v)$ einfach 0 bzw. $-\frac{v^{l-2}}{(l-2)!}$ setzen. Es liefert dann nur der erste Summand ($\nu = 1$) in (6.) einen Beitrag zu den fraglichen Koeffizienten, und dieser Beitrag ist

$$-\chi(1)\frac{v^{l-2}}{(l-2)!}.$$

Daher folgt:

$$\frac{d^a}{dv^a}[\log \psi(e^v)]_{v=0} \equiv \frac{d^a}{dv^a}[\log \varphi(e^v)]_{v=0} \mod l \qquad (a = 1, 2, \ldots, l-2),$$

$$\frac{d^{l-1}}{dv^{l-1}}[\log \psi(e^v)]_{v=0} \equiv \frac{d^{l-1}}{dv^{l-1}}[\log \varphi(e^v)]_{v=0} - \chi(1) \mod l$$

Da schließlich

$$\frac{\psi(1)}{\varphi(1)} = 1 + \chi(1) f(1) = 1 + l\chi(1),$$

also

$$-\chi(1) = \frac{\varphi(1) - \psi(1)}{l\varphi(1)}$$

ist, folgt wegen $\varphi(1) \equiv 1 \mod l$:

$$-\chi(1) \equiv \frac{\varphi(1) - \psi(1)}{l} \mod l, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Hiernach gilt:

*Satz 3. Ist $\alpha$ eine Einseinheit von $k_{\mathfrak{l}_1}$ und $a = \varphi(\zeta)$ $(\mathfrak{l}_1)$ eine Darstellung von $\alpha$ als rationale Funktion von $\zeta$ mit Koeffizienten aus $R_l(w_1)$, wobei $\varphi(x)$ als Quotient zweier ganzen rationalen, in $R_l(w_1)$ ganzzahligen, primitiven Funktionen in der Form $\frac{g(x)}{h(x)}$ dargestellt für $x = \zeta$ einen zu $\mathfrak{l}_1$ primen Nenner $h(\zeta)$ und dann auch Zähler $g(\zeta)$ hat, so sind die Ausdrücke*

$$l_a(\alpha) \equiv \frac{d^a}{dv^a}[\log \varphi(e^v)]_{v=0} \mod l; \qquad (a = 1, 2, \ldots, l-2),$$

$$l_{l-1}(\alpha) \equiv \frac{d^{l-1}}{dv^{l-1}}[\log \varphi(e^v)]_{v=0} + \frac{\varphi(1)-1}{l} \mod l$$

*mod. $l$ unabhängig von der speziellen Wahl von $\varphi$ allein durch $\alpha$ bestimmt. Sie heißen die logarithmischen Differentialquotienten von $\alpha$ für den Bereich von $\mathfrak{l}_1$.*

Über diese logarithmischen Differentialquotienten beweise ich folgende Sätze:

*Satz 4. Ist* $\alpha \equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{l}_1^{l-1}$, *so ist*

$$l_a(\alpha) \equiv 0 \mod l \quad \text{für} \quad a = 1, 2, \ldots, l-2,$$

*und wenn sogar* $\alpha \equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{l}_1^{l}$ *ist, auch*

$$l_{l-1}(\alpha) \equiv 0 \mod l.$$

*Beweis*: Es kann im ersten Falle

$$\alpha = 1 + l\chi(\zeta) \qquad (\mathfrak{l}_1)$$

gesetzt werden, wo $\chi(\zeta)$ für den Bereich von $\mathfrak{l}_1$ ganz ist, also etwa als ganze rationale Funktion von $\zeta$ mit ganzzahligen Koeffizienten aus $R_l(w_1)$ gewählt werden kann. Dann ist

$$\varphi(e^v) = 1 + l\chi(e^v)$$

und

$$\log \varphi^{(e^v)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} l^\nu (\chi(e^v))^\nu \quad (l),$$

$$\frac{d}{dv} \log \varphi(e^v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} l^\nu (\chi(e^v))^{\nu-1} \chi'(e^v) e^v \quad (l).$$

Hierin sind alle Differentialquotienten der Glieder rechts für $v = 0$ ganze, durch $l$ teilbare Zahlen aus $R_l(w_1)$, woraus die Behauptung für den ersten Fall folgt, da ja hier das Normierungsglied $\frac{\varphi(1)-1}{l}$ nicht in Frage kommt. Ist ferner sogar $\alpha \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}_1^l$, so ist bei Benutzung der obigen Darstellung $\varphi$ für $\alpha$:

$$\chi(\zeta) \equiv 0 \mod \mathfrak{l}_1,$$

also

$$\chi(1) \equiv 0 \mod l,$$

$$\frac{\varphi(1)-1}{l} = \chi(1) \equiv 0 \mod l,$$

so daß auch $l_{l-1}(\alpha) \equiv 0$ mod. $l$ wird, w. z. b. w.

*Satz 5. Es ist*

$$\left.\begin{aligned} l_a(\alpha\beta) &\equiv l_a(\alpha) + l_a(\beta) \mod l \\ l_a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) &\equiv l_a(\alpha) - l_a(\beta) \mod l \end{aligned}\right\}; \quad (a = 1, 2, \ldots, l-1)$$

*für irgendzwei* $\alpha, \beta \equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{l}_1$ *aus* $k_{\mathfrak{l}_1}$.

*Beweis*: Sind $\varphi(e^v)$ und $\psi(e^v)$ irgendwelche $\alpha$ bzw. $\beta$ zugeordnete Funktionen mit den erforderlichen Eigenschaften, so kann $\varphi(e^v) \cdot \psi(e^v)$ als zugeordnete Funktion für $\alpha \cdot \beta$ verwendet werden. Es gilt dann

$$\log \varphi(e^v) + \log \psi(e^v) = \log[\varphi(e^v) \cdot \psi(e^v)] \quad (l)$$

identisch in $v$. Also stimmen alle Differentialquotienten für $v = 0$ beider Seiten überein. Da wegen $\varphi(1) \equiv \psi(1) \equiv 1$ mod. $l$ außerdem

$$\frac{\varphi(1)-1}{l} + \frac{\psi(1)-1}{l} \equiv \frac{\varphi(1)\,\psi(1)-1}{l} \mod l$$

ist, folgt unmittelbar die erste Behauptung des Satzes. Die zweite folgt ebenso oder auch aus der Tatsache

$$l_a(1) \equiv 0 \mod l; \quad (a = 1, 2, \ldots, l-1)$$

und der ersten Behauptung in bekannter Weise.

*Satz* 6. *Sind* $\alpha, \beta \equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{l}_1$ *und* $\alpha \equiv \beta$ *mod.* $\mathfrak{l}_1^{l-1}$ *so ist*

$$l_a(\alpha) \equiv l_a(\beta) \text{ mod. } l; \qquad (a = 1, 2, \ldots l-2).$$

*Ist sogar* $\alpha \equiv \beta$ *mod.* $\mathfrak{l}_1^l$, *so ist auch*

$$l_{l-1}(\alpha) \equiv l_{l-1}(\beta) \text{ mod. } l.$$

*Beweis*: Es ist dann $\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1$ mod. $\mathfrak{l}_1^{l-1}$ bzw. mod. $\mathfrak{l}_1^l$, woraus nach Satz 4 und 5 alles folgt.

*Satz* 7. *Es ist für* $\alpha \equiv 1$ *mod.* $\mathfrak{l}_1$:

$$l_a(s\alpha) \equiv r^a l_a(\alpha) \text{ mod. } l; \qquad (a = 1, 2, \ldots l-1).$$

*Beweis*: Zu $s\alpha$ gehört die Funktion $\varphi(e^{rv})$ und offenbar ist

$$\frac{d^a}{dv^a}[\log \varphi(e^{rv})]_{v=0} = r^a \frac{d^a}{dv^a}[\log \varphi(e^v)]_{v=0}.$$

Das beweist die Behauptung zunächst für $a = 1, 2, \ldots l-2$. Für $a = l-1$ gilt dasselbe, weil einerseits $r^{l-1} = 1$ $(l)$ ist, also gar kein Faktor auftritt, andererseits auch das Normierungsglied $\frac{\varphi(1)-1}{l}$ für $\alpha$ und $s\alpha$ dasselbe ist.

*Satz* 8 [1]). *Es sei* $v_1, v_2, \ldots, v_f$ *ein System von* $f$ *linear unabhängigen, ganzen Zahlen aus* $R_l(w_1)$, *ferner durch*

$$g_a(s) = -r^a \frac{s^{l-1}-1}{s-r^a}, \qquad (a = 1, \ldots, l-1)$$

$l-1$ *ganze rationale Funktionen von* $s$ *mit ganzzahligen Koeffizienten aus* $R_l$ *erklärt. Dann bilden die* $f(l-1)+1$ *Einseinheiten*

$$\varkappa_{ai} = (1 + v_i \lambda^a)^{g_a(s)} \quad ; (a = 1, 2, \ldots l-1 ; \quad i = 1, 2, \ldots f)$$
$$\varkappa_0 = 1 + \lambda^l$$

*ein Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung in* $k_{\mathfrak{l}_1}$ *mit den Eigenschaften*

$$\varkappa_{ai} \equiv 1 + v_i \lambda^a \text{ mod. } \mathfrak{l}_1^{a+1},$$
$$\varkappa_{ai}^{s-r^a} = 1 \qquad (\mathfrak{l}_1).$$

*Ist ferner*

$$\alpha = \prod_{a=1}^{l-1} \prod_{i=1}^{f} \varkappa_{ai}^{c_{ai}} \varkappa_0^{c_0} \alpha_0^l \qquad (\mathfrak{l}_1); \qquad (c_{ai}, c_0 \text{ mod. } l)$$

*die Darstellung einer beliebigen Einseinheit* $\alpha$ *von* $k_{\mathfrak{l}_1}$ *durch dieses Fundamentalsystem, so gilt*:

$$l_a(\alpha) \equiv \Big(\sum_{i=1}^{f} c_{ai} v_i\Big) \cdot (-1)^a a! \text{ mod. } l.$$

*Beweis*: Da $s\lambda^a \equiv r^a \lambda^a$ mod. $\mathfrak{l}_1^{a+1}$ ist, und die $v_i$ bei $s$ invariant sind, ist

$$\varkappa_{ai} \equiv 1 + g(r^a) v_i \lambda^a \equiv 1 + v_i \lambda^a \text{ mod. } \mathfrak{l}_1^{a+1};$$

[1]) Siehe die entsprechenden Tatsachen für $k_\zeta$ in der Darstellung bei *T. Takagi*, On the Law of Reciprocity in the Cyclotomic Corpus, Proc. of the Phys.-math. Soc. of Japan, Ser. 3, Vol. 4, 1922. (Vgl. Anm. 4 in R. G. II, S. 97.)

denn man findet

$$g(r^a) = \lim_{s=r^a} -r^a \frac{s^{l-1}-1}{s-r^a} = -r^a \frac{(l-1)r^{a(l-2)}}{1} = -(l-1) \equiv 1 \mod l.$$

Daher bilden die $\varkappa_{ai}$ mit $\varkappa_0$ zusammen ein Fundamentalsystem für die Darstellung aller Einseinheiten von $k_{\mathfrak{l}_1}$. Daß $\varkappa_{ai}^{s-r^a} = 1$ $(\mathfrak{l}_1)$ ist, folgt aus

$$(s-r^a)g_a(s) = -r^a(s^{l-1}-1) = 0.$$

Um schließlich die letzte Behauptung zu beweisen, ist nach Satz 4 und 5 nur noch

$$l_a(\varkappa_{bi}) \equiv \begin{cases} 0 & \mod l, \quad \text{für } a \neq b \\ (-1)^a a!\, v_i & \mod l, \quad \text{für } a = b \end{cases}$$

nachzuweisen. Nun ist nach Satz 5 und 7:

$$l_a(\varkappa_{bi}) = l_a(1+v_i\lambda^b)^{g_b(s)} \equiv g_b(r^a)\, l_a(1+v_i\lambda^b) \mod l.$$

Da $g_b(r^a) = 0$ für $b \neq a$, folgt der erste Teil. Für $b = a$ ist $g_a(r^a) \equiv 1 \mod l$, also

$$l_a(\varkappa_{ai}) = l_a(1+v_i\lambda^a) \mod l.$$

Als $1+v_i\lambda^a$ zugeordnete Funktion kann $\varphi(e^v) = 1+v_i(1-e^v)^a$ gewählt werden. Dann ist $\varphi(1) = 1$, so daß für $a = l-1$ der Normierungsfaktor wegfällt. Weiter ist

$$\log \varphi(e^v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} v_i^\nu (1-e^v)^{a\nu} \quad (l),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} v_i^\nu \sum_{\mu=0}^{a\nu} (-1)^\mu \binom{a\nu}{\mu} e^{v\mu} \quad (l).$$

Der $a$-te Differentialquotient von $e^{v\mu}$ bei $v = 0$ ist $\mu^a$, also

$$l_a(\varkappa_{ai}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} v_i^\nu \sum_{\mu=0}^{a\nu} (-1)^\mu \binom{a\nu}{\mu} \mu^a \mod l.$$

Nun ist die $\sum_\mu$ die $a\nu$-te Differenz von $0^a, 1^a, 2^a, \ldots$, also für $\nu > 1$ sicher Null, nur für $\nu = 1$ gleich $(-1)^a a!$, so daß schließlich wird:

$$l_a(\varkappa_{ai}) \equiv (-1)^{a-1} a!\, v_i \mod l, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

*Satz 9. Es gilt für die Hilbertschen Normenrestsymbole*

$$\left(\frac{\varkappa_{ai}, \varkappa_0}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1; \quad \left(\frac{\varkappa_{ai}, \varkappa_{bj}}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1, \qquad \textit{wenn} \quad a+b \neq l.$$

*Beweis*: Die erste Behauptung ist bereits an früherer Stelle bewiesen[1]). Um die zweite Formel zu beweisen, wenden wir auf das Normenrestsymbol $\left(\frac{\varkappa_{ai}, \varkappa_{bj}}{\mathfrak{l}_1}\right)$ den Automorphismus $s$ von $k_{\mathfrak{l}_1}$ an, d. h. bilden

$$\left(\frac{s\varkappa_{ai}, s\varkappa_{bj}}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\varkappa_{ai}^{r^a}, \varkappa_{ai}^{r^b}}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\varkappa_{ai}, \varkappa_{bj}}{\mathfrak{l}_1}\right)^{r^{a+b}}; \quad \text{(Satz 8)}.$$

Andererseits muß aber

$$\left(\frac{s\varkappa_{ai}, s\varkappa_{bj}}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\varkappa_{ai}, \varkappa_{bi}}{\mathfrak{l}_1}\right)^r$$

---

[1]) Siehe z. B. *H. Hasse*, Zerlegungs- und Vertauschungssatz . . . ., ds. Journ., Bd. 154, S. 23, Gl. (5.).

sein. Um diese Behauptung einzusehen, ist auf die Definition des Symbols $\left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}_1}\right)$ für beliebige $a, \beta$ aus $k_{\mathfrak{l}_1}$ einzugehen[1]). Da hier die Ordnung $l-1$ von $\mathfrak{l}_1$ prim zu $l$ ist, sind die Resultate einer vorangehenden Note von mir[2]) anwendbar. Um auf Grund der dort gegebenen, allein im Körper $k_{\mathfrak{l}_1}$ verlaufenden Definition das Normenrestsymbol $\left(\frac{s\,a, s\beta}{\mathfrak{l}_1}\right)$ zu finden, unterwerfe man den Körper $k_{\mathfrak{l}_1}$ dem Automorphismus $s$. Dadurch gehen $a, \beta$ in $sa$, $s\beta$ über, das a. a. O. verwendete Fundamentalsystem $(\eta_i)$ in das konjugierte $(s\eta_i)$, und die Exponenten von $sa$, $s\beta$ bei der Darstellung durch $(s\eta_i)$ sind dieselben, wie von $a, \beta$ bezüglich $(\eta_i)$. Wegen der Invarianz der Normzahl- bzw. Nichtnormzahl-Eigenschaft bei $s$ geht daher die dortige (vorläufig nicht normierte) Bilinearform $L(x/y)$ in eine nur um einen zu $l$ primen Faktor unterschiedene über, für die wieder $L(x/y)$ gewählt werden kann. Da $s\zeta = \zeta^r$ und $s(1+ul) = 1+ul$; ($u$ aus $R_l(w_1)$ ist bei $s$ invariant), tritt bei der Normierung von $L(x/y)$ bezüglich des konjugierten Systems $(s\eta_i)$ und bei Zugrundelegung von $\zeta^r$ als Basis für die Symbole derselbe Normierungsfaktor $\frac{(l-1)\,s_{\mathfrak{l}}(u)}{L(x^{(0)}/y^{(0)})}$ zu $L(x/y)$, wie bei der Normierung von $L(x/y)$ bezüglich $(\eta_i)$ für $\zeta$ als Basis. Daher ist tatsächlich, wenn $L_0(x/y)$ die so normierte Bilinearform bezeichnet,

$$\left(\frac{s\alpha, s\beta}{\mathfrak{l}_1}\right) = (\zeta^r)^{L_0(x/y)} = (\zeta^{L_0(x/y)})^r = \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_1}\right)^r.$$

Da somit

$$\left(\frac{s\varkappa_{ai}, s\varkappa_{bj}}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\varkappa_{ai}, \varkappa_{bj}}{\mathfrak{l}_1}\right)^{r^{a+b}} = \left(\frac{\varkappa_{ai}, \varkappa_{bj}}{\mathfrak{l}_1}\right)^r$$

ist, muß

$$\left(\frac{\varkappa_{ai}, \varkappa_{bj}}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1$$

sein, wenn nicht

$$r^{a+b} = r \quad (l),$$

d. h. $a+b \equiv 1 \bmod. l-1$ ist. Wegen $1 \leqq a, b \leqq l-1$ tritt dies nur für $a+b = l$ ein, w. z. b. w.

---

[1]) Es genügt nicht davon auszugehen, daß $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_1}\right)$ eine Potenz von $\zeta$ ist, und also bei $s$ in die $r$-te Potenz übergeht. Denn es ist nicht von vornherein einzusehen, daß (analog wie bei *rationalen* Funktionen von $\alpha$ und $\beta$) $s\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{s\alpha, s\beta}{\mathfrak{l}_1}\right)$ ist. Hierzu ist der genauen Definition des Normenrestsymbols (Festlegung der Normennichtrestcharaktere!) nachzugehen. Solange zu dieser vollständigen Definition nur der *Hilbert*sche Weg über die Gesamtheit der zu $l$ primen $\mathfrak{p}$ zur Verfügung steht, ist die Frage deshalb schwer angreifbar, weil die Substitution $s$ für den ganzen Körper $k$ (im Gegensatz zu $k_{\mathfrak{l}_1}$) im allgemeinen kein Automorphismus ist, ja gar nicht eindeutig definiert ist. Daher erschien es mir notwendig, eine Definition der Symbole $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_1}\right)$ zu geben, die ganz im Körper $k_{\mathfrak{l}_1}$ verläuft, und daher dem Automorphismus $s$ von $k_{\mathfrak{l}_1}$ unterworfen werden kann, was in der in Anm. 2 genannten Note geschehen ist.

[2]) Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern (Dritter Teil: Normierung), ds. Journ. Bd. 154, S. 174ff.

*Satz* 10. *Für* $\alpha, \beta \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}_1$ *ist*

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_1}\right) = \zeta^{\sum_{a=1}^{l-1} C_a \, S_1 \, (l_a(\alpha) \cdot l_{l-a}(\beta))},$$

*wo die* $C_a$ *nur von a abhängige ganze rationale, zu l prime Zahlen sind.*

*Beweis* : Sei

$$\alpha = \prod_{a=1}^{l-1} \prod_{i=1}^{f} \varkappa_{ai}^{c_{ai}} \, \varkappa_0^{c_0} \, \alpha_0^{l} = \alpha_1 \ldots \alpha_{l-1} \, \varkappa_0^{c_0} \, \alpha_0^{l} \quad (\mathfrak{l}_1),$$

$$\beta = \prod_{b=1}^{l-1} \prod_{j=1}^{f} \varkappa_{bj}^{d_{bj}} \, \varkappa_0^{d_0} \, \beta_0^{l} = \beta_1 \ldots \beta_{l-1} \, \varkappa_0^{d_0} \, \beta_0^{l} \quad (\mathfrak{l}_1),$$

wobei die Faktoren mit gleichem $a$ bzw. $b$ in $\alpha_a$ bzw. $\beta_b$ zusammengefaßt sind, also

$$\alpha_a = \prod_{i=1}^{f} \varkappa_{ai}^{c_{ai}}; \qquad \beta_b = \prod_{j=1}^{f} \varkappa_{bj}^{d_{bj}} \qquad (\mathfrak{l}_1)$$

gesetzt ist. Dann ist nach Satz 9:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\alpha_1, \beta_{l-1}}{\mathfrak{l}_1}\right)\left(\frac{\alpha_2, \beta_{l-2}}{\mathfrak{l}_1}\right) \ldots \left(\frac{\alpha_{l-1}, \beta_1}{\mathfrak{l}_1}\right).$$

Nun ist nach den Ausführungen in R. G. I, S. 197, (6.):

$$(8.) \qquad \left(\frac{\alpha_a, \beta_{l-a}}{\mathfrak{l}_1}\right) = \zeta^{C'_a \, S_1 \left(\frac{\alpha_a - 1}{\lambda^a} \, \frac{\beta_{l-a}-1}{\lambda^{l-a}}\right)}$$

mit einem festen, also nur von $a$ abhängigen, ganzen rationalen, zu $l$ primen $C'_a$ Dabei bedeutet, wie oben festgesetzt, $S_1$ die Spur in $R_l(w_1)$, und wenn diese, wie hier, von Zahlen aus $k_{\mathfrak{l}_1}$ zu bilden ist, daß die Spur $S_1$ von dem in $R_l(w_1)$ liegenden Kongruenzwert des Argumentes mod. $\mathfrak{l}_1$ zu nehmen ist. Da nun

$$\frac{\alpha_a - 1}{\lambda^a} \equiv \sum_{i=1}^{f} c_{ai} v_i; \qquad \frac{\beta_{l-a} - 1}{\lambda^{l-a}} \equiv \sum_{j=1}^{f} d_{l-a,j} v_j \quad \bmod. \mathfrak{l}_1$$

ist, wie sich aus der multiplikativen Darstellung von $\alpha_a, \beta_{l-a}$ und Satz 8 ohne weiteres ergibt, folgt nach Satz 8

$$(9.) \quad \left(\frac{\alpha_a, \beta_{l-a}}{\mathfrak{l}_1}\right) = \zeta^{C'_a \, S_1 \left\{ \frac{l_a(\alpha)}{(-1)^a a!} \cdot \frac{l_{l-a}(\beta)}{(-1)^{l-a}(l-a)!} \right\}} = \zeta^{\frac{C'_a}{a!(l-a)!} \, S_1 \, (l_a(\alpha) \, l_{l-a}(\beta))}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

*Satz* 11. *Zwischen den Konstanten* $C_a$ *von Satz* 10 *und* $C'_a$ *in* (8.) *besteht die Relation*

$$C'_a \equiv (-1)^{a-1} \, a \, C_a \bmod. l.$$

*Beweis*: Nach (9.) ist

$$C'_a \equiv -a! \, (l-a)! \, C_a \bmod. l.$$

Nun ist

$$\frac{1}{l}\binom{l}{a} = \frac{(l-1)!}{a! \, (l-a)!} \equiv \frac{-1}{a! \, (l-a)!} \bmod. l,$$

und somit

$$\frac{-1}{a! \, (l-a)!} \equiv \frac{1}{l}\binom{l}{a} \equiv \frac{(l-1) \ldots (l-(a-1))}{a!} \equiv \frac{(-1)^{a-1}(a-1)!}{a!} \equiv \frac{(-1)^{a-1}}{a} \bmod. l,$$

woraus die Behauptung folgt.

*Satz* 12. *Es gilt für die Konstanten* $C_a$ *von Satz* 10:

$$C_a \equiv (-1)^{a-1} \mod l.$$

*Beweis*: Nach Satz 11 genügt es, $C_a' \equiv a \mod l$ zu zeigen. Sei dazu

$$\alpha_a = 1 + g\,\lambda^a + \cdots \quad (\mathfrak{l}_1); \qquad (g \text{ rational und } g \not\equiv 0 \mod l)$$

eine Zahl aus $k_\zeta$ und

$$\beta_{l-a} = 1 + u\lambda^{l-a} + \cdots \quad (\mathfrak{l}_1); \qquad (u \text{ in } R_l(w_1) \text{ und } S_1(u) \not\equiv 0 \mod l)$$

eine Zahl aus $k$, deren Entwicklungen in $k_{\mathfrak{l}_1}$ wie angegeben beginnen, und die ersichtlich stets in mannigfacher Art gefunden werden können, auch wenn noch die hiervon ganz unabhängigen Bedingungen hinzugefügt werden, daß $\alpha_a$ und $\beta_{l-a}$ prim zu $l$, kernprim zueinander und $\beta_{l-a} \equiv 1 \mod (\mathfrak{l}_2 \ldots \mathfrak{l}_n)^{l+1}$ sein soll. Aus den zuletzt genannten Bedingungen folgt dann nach dem *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{\alpha_a, \beta_{l-a}}{\mathfrak{l}_1}\right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(\frac{\alpha_a, \beta_{l-a}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha_a}{\beta_{l-a}}\right)\left(\frac{\beta_{l-a}}{\alpha_a}\right)^{-1},$$

wo $\prod_{\mathfrak{p}}'$ über alle zu $l$ primen Primteiler $\mathfrak{p}$ von $k$ erstreckt ist. Nun ist nach R. G. II, Hilfssatz 2 für diese $\mathfrak{p}$, weil $a$ in $k_\zeta$ liegt, wenn $n$ die Relativnorm von $k$ nach $k_\zeta$ bezeichnet:

$$\left(\frac{\alpha_a}{\beta_{l-a}}\right)_k \left(\frac{\beta_{l-a}}{\alpha_a}\right)_k^{-1} = \left(\frac{\alpha_a}{n(\beta_{l-a})}\right)_{k_\zeta} \left(\frac{n(\beta_{l-a})}{\alpha_a}\right)_{k_\zeta}^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}_0}{}' \left(\frac{\alpha_a, n(\beta_{l-a})}{\mathfrak{p}_0}\right) = \left(\frac{\alpha_a, n(\beta_{l-a})}{\mathfrak{l}}\right)^{-1},$$

wo $\mathfrak{p}_0$ die zu $l$ primen Primteiler von $k_\zeta$ durchläuft. Zusammengenommen ist also

$$\left(\frac{\alpha_a, \beta_{l-a}}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\alpha_a, n(\beta_{l-a})}{\mathfrak{l}}\right).$$

Aus der Entwicklung von $\alpha_a$ für den Bereich von $\mathfrak{l}$, die mit der obigen für den Bereich von $\mathfrak{l}_1$ identisch ist, und der

$$n(\beta_{l-a}) = 1 + S_1(u)\lambda^{l-a} + \cdots \quad (\mathfrak{l})$$

lautenden Entwicklung von $n(\beta_{l-a})$ für den Bereich von $\mathfrak{l}$ — (hierbei ist zu benutzen, daß $\beta_{l-a} \equiv 1 \mod (\mathfrak{l}_2 \ldots \mathfrak{l}_n)^{l+1}$) — folgt nun, etwa nach den Ergebnissen von *Takagi* [1]) für $k_\zeta$, daß

$$\left(\frac{\alpha_a, n(\beta_{l-a})}{\mathfrak{l}_0}\right) = \zeta^{a g S_1(u)}$$

ist. Durch Vergleich mit (8.) ergibt sich also wegen $g S_1(u) \not\equiv 0 \mod l$, daß $C_a' \equiv a \mod l$, w. z. b. w.

Das Resultat von Satz 10 lautet nunmehr genauer:

*Satz* 13. *Für* $\alpha, \beta \equiv 1 \mod \mathfrak{l}_1$ *ist*

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_1}\right)^{-1} = \zeta^{S_1\left\{\sum_{a=1}^{l-1} (-1)^a l_a(\alpha) l_{l-a}(\beta)\right\}}.$$

Diese Formel ist das genaue Analogon zu der in R. G. II. als Ausgangspunkt benutzten *Kummer-Hilbert-Takagi*schen Formel (2.), S. 97. Von hier an laufen die

[1]) Siehe die a. S. 207 zitierte Arbeit, S. 174, (6); 175, (7).

Entwicklungen zu denen von R. G. II ganz parallel, so daß ich mich kurz fassen kann.

Um in der Formel von Satz 13 die logarithmischen Differentialquotienten durch wirkliche Logarithmen zu ersetzen, stellen wir $\alpha$ und $\beta$ durch das Fundamentalsystem

$$1 + v_i \lambda^a \; ; \quad 1 + \lambda^l \; ; \qquad (a = 1, 2, \ldots, l-1 \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, f)$$

von $k_{\mathfrak{l}_1}$ dar:

$$\alpha = \prod_{i=1}^{f} \prod_{a=1}^{l-1} (1 + v_i \lambda^a)^{c_{ai}} \, (1 + \lambda^l)^{c_0} \, \alpha_0^l \qquad (\mathfrak{l}_1),$$

$$\beta = \prod_{j=1}^{f} \prod_{b=1}^{l-1} (1 + v_j \lambda^b)^{d_{bj}} \, (1 + \lambda^l)^{d_0} \, \beta_0^l \qquad (\mathfrak{l}_1).$$

Setzt man dann

$$\left(\frac{1 + v_i \lambda^a, \; 1 + v_j \lambda^b}{\mathfrak{l}_1}\right)^{-1} = \zeta^{p_{ab}^{(ij)}}.$$

und berücksichtigt, daß die Normenrestsymbole, in denen eine oder beide Komponenten $1 + \lambda^l$ sind, gleich 1 sind, so folgt:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_1}\right)^{-1} = \zeta^{\sum_{i,j=1}^{f} \sum_{a,b=1}^{l-1} c_{ai} d_{bj} p_{ab}^{(ij)}}.$$

Für die $p_{ab}^{(ij)}$ findet man durch genau dieselbe Rechnung wie in R. G. II. auf Grund von Satz 13 die folgenden Ausdrücke:

$$p_{ab}^{(ij)} \equiv S_1 \left\{ \sum_{x=1}^{l-1} x \frac{s_1[\zeta^{-x} \log (1 + v_i \lambda^a)]}{l} \cdot \frac{s_1[\zeta^x \log (1 + v_j \lambda^b)]}{l} \right\} \mod l \quad \text{für} \quad a, b > 1,$$

$$p_{1b}^{(ij)} \equiv S_1 \left\{ \sum_{x=1}^{l-1} x \frac{s_1[\zeta^{-x} \log (1 + v_i \lambda)]}{l} \cdot \frac{s_1[\zeta^x \log (1 + v_j \lambda^b)]}{l} - v_i^l \frac{s_1[\log (1 + v_j \lambda^b)]}{l} \right\} \mod l \quad \text{für} \quad b > 1,$$

$$p_{a1}^{(ij)} \equiv S_1 \left\{ \sum_{x=1}^{l-1} x \frac{s_1[\zeta^{-x} \log (1 + v_i \lambda^a)]}{l} \cdot \frac{s_1[\zeta^x \log (1 + v_j \lambda)]}{l} + v_j^l \frac{s_1[\log (1 + v_i \lambda^a)]}{l} \right\} \mod l \quad \text{für} \quad a > 1,$$

$$p_{11}^{(ij)} \equiv S_1 \left\{ \sum_{x=1}^{l-1} x \frac{s_1[\zeta^{-x} \log (1 + v_i \lambda)]}{l} \cdot \frac{s_1[\zeta^x \log (1 + v_j \lambda)]}{l} - v_i^l \frac{s_1[\log (1 + v_j \lambda)]}{l} + v_j^l \frac{s_1[\log (1 + v_i \lambda)]}{l} \right\} \mod l.$$

Es wird dann:

$$\sum_{i,j=1}^{f} \sum_{a,b=1}^{l-1} c_{ai} d_{bj} p_{ab}^{(ij)} \equiv S_1 \left\{ \sum_{x=1}^{l-1} x \frac{s_1[\zeta^{-x} \sum_{a,i} c_{ai} \log (1 + v_i \lambda^a)]}{l} \cdot \frac{s_1[\zeta^x \sum_{b,j} d_{bj} \log (1 + v_j \lambda^b)]}{l} \right\}$$
$$- S_1 \left\{ \sum_i c_{1i} v_i^l \cdot \frac{s_1[\sum_{b,j} d_{bj} \log (1 + v_j \lambda^b)]}{l} \right\}$$
$$+ S_1 \left\{ \sum_j d_{1j} v_j^l \cdot \frac{s_1[\sum_{a,i} c_{ai} \log (1 + v_i \lambda^a)]}{l} \right\} \mod l,$$

wobei rechts $a, b, i, j$ die links angegebenen Werte durchlaufen. Da nun

$$\log(1+\lambda^l) = \lambda^l - \frac{\lambda^{2l}}{2} + \cdots \equiv 0 \mod \mathfrak{l}_1^l$$

$$\log \alpha_0^l = l \log \alpha_0 \equiv 0 \mod \mathfrak{l}_1^l$$

ist (Hilfssatz 1 von R. G. II.), kann die letzte Formel auf Grund der multiplikativen Darstellung von $\alpha$ und $\beta$ auch so geschrieben werden:

$$\sum_{i,j=1}^{l}\sum_{a,b=1}^{l-1} c_{ai} d_{bj} p_{ab}^{(ij)} \equiv S_1\Big\{\sum_{\varkappa=1}^{l-1} \varkappa \frac{s_1(\zeta^{-\varkappa}\log\alpha)}{l}\cdot\frac{s_1(\zeta^{\varkappa}\log\beta)}{l} - \sum_{i=1}^{l} c_{1i} v_i^l \cdot \frac{s_1(\log\beta)}{l} + \sum_{j=1}^{l} d_{1j} v_j^l \cdot \frac{s_1(\log\alpha)}{l}\Big\} \mod l.$$

Schließlich ist

$$\alpha = 1 + \Big(\sum_{i=1}^{l} c_{1i} v_i\Big)\lambda + \cdots \ (\mathfrak{l}_1) \ ; \qquad \beta = 1 + \Big(\sum_{j=1}^{l} d_{1j} v_j\Big)\lambda + \cdots \ (\mathfrak{l}_1),$$

also

$$s_1\Big(\frac{\alpha-1}{\lambda}\Big) = -\sum_{i=1}^{l} c_{1i} v_i \mod l \ ; \qquad s_1\Big(\frac{\beta-1}{\lambda}\Big) \equiv -\sum_{j=1}^{l} d_{1j} v_j \mod l$$

und

$$\Big(s_1\Big(\frac{\alpha-1}{\lambda}\Big)\Big)^l \equiv -\sum_{i=1}^{l} c_{1i} v_i^l \mod l \ ; \qquad \Big(s_1\Big(\frac{\beta-1}{\lambda}\Big)\Big)^l \equiv -\sum_{j=1}^{l} d_{1j} v_j^l \mod l \ ^{1}).$$

Damit wird

$$\Big(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}_1}\Big)^{-1} = \zeta^{S_1\left\{\sum_{\varkappa=1}^{l-1}\varkappa\frac{s_1(\zeta^{-\varkappa}\log\alpha)}{l}\cdot\frac{s_1(\zeta^{\varkappa}\log\beta)}{l} + \left(s_1\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)\right)^l \frac{s_1(\log\beta)}{l} - \left(s_1\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right)\right)^l \frac{s_1(\log\alpha)}{l}\right\}}.$$

Sind nun $\alpha, \beta$ irgendzwei zueinander kernprime Zahlen aus $k$ mit der Eigenschaft

$$\alpha, \beta \equiv 1 \mod \mathfrak{l}, \qquad \text{also} \qquad \mod \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \ldots \mathfrak{l}_n,$$

so ist nach dem *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetz

$$\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{-1} = \prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}_i}\Big)^{-1}.$$

Daraus ergibt sich auf Grund der letzten Formel unmittelbar die zu beweisende Behauptung.

Es sei noch bemerkt, daß in der Endformel, analog wie in R. G. II., die Terme $\frac{s_i(\log\alpha)}{l}$, $\frac{s_i(\log\beta)}{l}$ auch durch $\frac{n_i(\alpha)-1}{l}$, $\frac{n_i(\beta)-1}{l}$ ersetzt werden können, so daß man auch hat

$$\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{-1} = \zeta^{\sum_{i=1}^{n} S_i\left\{\sum_{\varkappa=1}^{l-1}\varkappa\frac{s_i(\zeta^{-\varkappa}\log\alpha)}{l}\cdot\frac{s_i(\zeta^{\varkappa}\log\beta)}{l} + s_i\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)^l\frac{n_i(\beta)-1}{l} - s_i\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right)^l\frac{n_i(\alpha)-1}{l}\right\}},$$

---

[1]) Offenbar ist $s_1\Big(\frac{\alpha-1}{\lambda}\Big)^l \equiv \Big(s_1\Big(\frac{\alpha-1}{\lambda}\Big)\Big)^l \mod l$, so daß in der Endformel auch $s_1\Big(\frac{\alpha-1}{\lambda}\Big)^l$, $s_1\Big(\frac{\beta-1}{\lambda}\Big)^l$ geschrieben werden kann.

wenn $n_i$ die Norm von $k_{l_i}$ nach $R_l(w_i)$ bezeichnet. Denn wenn $a \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}_i$ ist, und $a, a', \ldots$ die bezüglich $R_l(w_i)$ relativ-konjugierten zu $a$ in $k_{l_i}$ sind, so ist

$$s_i(\log a) = \log a + \log a' + \cdots = \log a \cdot a' \ldots = \log n_i(a).$$

Ist nun $n_i(a) = 1 + u\,l$, wo $u$ in $R_l(w_i)$ liegt, so ist

$$\log n_i(a) = u\,l + \frac{u^2 l^2}{2} + \cdot \quad \equiv u\,l \bmod. l^2,$$

$$\frac{s_i(\log a)}{l} = \frac{\log n_i(a)}{l} \equiv u = \frac{n_i(a) - 1}{l} \bmod. l, \quad \text{wie behauptet.}$$

# Der zweite Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste für beliebige zu $l$ prime Zahlen in gewissen Oberkörpern des Körpers der $l$-ten Einheitswurzeln.

Von *Helmut Hasse* in Halle.

Es sei $l$ zunächst eine ungerade Primzahl, $k_\zeta$ der Körper der $l$-ten Einheitswurzeln, $\mathfrak{l} = (\lambda) = (1 - \zeta)$ der Primteiler von $l$ in $k_\zeta$ und $k$ ein solcher Oberkörper von $k_\zeta$, in dem die Primteilerzerlegung von $\mathfrak{l}$ lautet:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \dots \mathfrak{l}_n ; \qquad (\mathfrak{l}_i \text{ vom Grade } f_i),$$

also $\mathfrak{l}$ nur einfache Primfaktoren hat. Dann werde ich beweisen:

*Satz* 1. *Ist $\mathcal{A}$ eine Zahl aus $k$ mit der Primteilerzerlegung*

$$(\mathcal{A}) = \mathfrak{l}_1^{a_1} \dots \mathfrak{l}_n^{a_n} \mathfrak{a} ; \quad (\mathfrak{a}, l) = 1,$$

*$\alpha$ eine Zahl aus $k$ mit den Eigenschaften*

$$\alpha \equiv 1 \ mod.\ \mathfrak{l},$$

$$\alpha \text{ und } \mathfrak{a} \text{ kernprim zueinander},$$

*so lautet der zweite Ergänzungssatz zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste in $k$ für $\mathcal{A}$ und $\alpha$:*

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)^{-1} = \zeta^{-\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\left[\left(\frac{\mathcal{A}}{\lambda^{a_i}}\right)^{l^{f_i}-1}, \alpha\right] - \sum_{i=1}^{n} a_i S_{\mathfrak{l}_i}\left(\frac{\zeta \log \alpha}{l\lambda}\right)}.$$

*Dabei ist zur Abkürzung gesetzt* [1]*:*

$$\varphi_i(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} S_i \left\{ \sum_{x=1}^{l=1} x \frac{s_i(\zeta^{-x} \log \alpha)}{l} \cdot \frac{s_i(\zeta^x \log \beta)}{l} + s_i\left(\frac{\alpha - 1}{\lambda}\right)^l \frac{s_i(\log \beta)}{l} - s_i\left(\frac{\beta - 1}{\lambda}\right)^l \frac{s_i(\log \alpha)}{l} \right\}$$

*und es bedeutet:*

[1]) Siehe meine vorangehende Arbeit: Das allgemeine Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste, ds. Journ. Bd. 154, S. 199 ff.

*$S_i$ die Spur im Koeffizientenkörper des Henselschen Körpers $k_{\mathfrak{l}_i}$,*
*$s_i$ die Relativspur von $k_{\mathfrak{l}_i}$ nach seinem Koeffizientenkörper,*
*$S_{\mathfrak{l}_i} = S_i s_i$ die Spur in $k_{\mathfrak{l}_i}$.*

Diese Formel ist als die denkbar allgemeinste Formulierung des zweiten Ergänzungssatzes in den betrachteten Körpern $k$ anzusehen, insofern, als $\mathcal{A}$ eine *ganz beliebige* Zahl aus $k$ bedeuten kann. Bezüglich $a$ wären allerdings die allgemeinsten, der Natur der Sache entsprechenden Voraussetzungen nur:

$a$ prim zu $l$ und $\mathfrak{a}$, $a$ kernprim zueinander.

Dann führt jedoch die Bemerkung, daß

$$a^{f_1 \cdots f_n - 1} \equiv 1 \mod \mathfrak{l}$$

ist sofort auf den Fall des Satzes 1 zurück.

Es sei ferner $l = 2$ und entsprechend $k$ ein solcher algebraischer Körper, in dem die Primteilerzerlegung von 2 lautet:

$$(2) = \mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_n; \quad (\mathfrak{l}_i \text{ vom Grade } f_i),$$

also wieder 2 nur einfache Primfaktoren hat. Dann werde ich beweisen:

*Satz 2. Ist $\mathcal{A}$ eine Zahl aus $k$ mit der Primteilerzerlegung*

$$\mathcal{A} = \mathfrak{l}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{l}_n^{a_n} \mathfrak{a}; \qquad (\mathfrak{a}, 2) = 1,$$

*$a$ eine Zahl aus $k$ mit den Eigenschaften*

$$a \equiv 1 \mod 2, \qquad a \text{ total positiv},$$

$$a \text{ und } \mathfrak{a} \text{ kernprim zueinander},$$

*so lautet der zweite Ergänzungssatz zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste in $k$ für $\mathcal{A}$ und $a$:*

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{a}\right)\left(\frac{a}{\mathfrak{a}}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{n} S_{\mathfrak{l}_i}\left[\frac{\left(\frac{\mathcal{A}}{\lambda^{a_i}}\right)^{2^{f_i-1}}-1}{2} \cdot \frac{a-1}{2}\right] + \sum_{i=1}^{n} a_i S_{\mathfrak{l}_i}\left(\frac{\log a}{4}\right)}.$$

*Dabei bedeutet $S_{\mathfrak{l}_i}$ die Spur im Henselschen Körper $k_{\mathfrak{l}_i}$.*

Dies ist wieder die denkbar allgemeinste Formulierung des zweiten Ergänzungssatzes in den betrachteten Körpern, wenn man von den geringfügigen Änderungen absieht, die die angegebene Formel erleidet, wenn nur „$a$ prim zu 2“ und „$a$ von beliebiger Signatur“ vorausgesetzt wird. Im ersten Falle gilt das Entsprechende wie bei Satz 1. Im zweiten Falle kommt im Exponenten von $-1$ rechts noch die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{r_1} \frac{\operatorname{sgn}. \mathcal{A}^{(\nu)} - 1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}. a^{(\nu)} - 1}{2}$$

über die $r_1$ reellen konjugierten zu $k$ hinzu.

## Beweis für Satz 1.

Nach dem Ergebnis der a. v. S. Anm. 1 zitierten Arbeit gilt für Körper $k$ der betrachteten Art

$$(1.) \qquad \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1} = \zeta^{\varphi_i(\alpha, \beta)}; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wenn $\alpha, \beta \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}_i$ beliebige Zahlen aus $k_{\mathfrak{l}_i}$ sind und $\varphi_i(\alpha, \beta)$ die Bedeutung von Satz 1 hat.

Nun ist für die in Satz 1 genannten Zahlen $\Lambda, a$ nach dem *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetz:

$$(2.) \qquad \prod_{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})=1} \left(\frac{\Lambda, a}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\Lambda}{a}\right)\left(\frac{a}{\mathfrak{a}}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\Lambda, a}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1}.$$

Die hiernach zum Beweise von Satz 1 zu bestimmenden Normenrestsymbole $\left(\frac{\Lambda, a}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1}$ zerlegen wir so:

$$(3.) \qquad \left(\frac{\Lambda, a}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1} = \left(\frac{\Lambda \lambda^{-a_i}, a}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\lambda, a}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1}.$$

Im ersten Faktor rechts ist $\Lambda \lambda^{-a_i}$ prim zu $\mathfrak{l}_i$, also

$$(\Lambda \lambda^{-a_i})^{l^{f_i}-1} \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}_i$$

und

$$\left(\frac{\Lambda \lambda^{-a_i}, a}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1} = \left(\frac{(\Lambda \lambda^{-a_i})^{l^{f_i}-1}, a}{\mathfrak{l}_i}\right).$$

Daher wird der erste Faktor rechts in (3.) nach (1.)

$$(4.) \qquad \left(\frac{\Lambda \lambda^{-a_i}, a}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1} = \zeta^{-\varphi_i\left[\left(\frac{\Lambda}{\lambda^{a_i}}\right)^{l^{f_i}-1}, a\right]}.$$

Um den zweiten Faktor rechts in (3.) zu bestimmen, wenden wir das Ergebnis einer früheren Arbeit von *E. Artin* und mir [1]) an. Hiernach ist, weil $a \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}$ ist,

$$(5.) \qquad \left(\frac{\lambda}{a}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda, a}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1} = \zeta^{-S\left(\frac{\zeta \log a}{l \lambda}\right)} = \zeta^{-\sum_{i=1}^{n} S_{\mathfrak{l}_i}\left(\frac{\zeta \log a}{l \lambda}\right)},$$

wenn $S = \sum_{i=1}^{n} S_{\mathfrak{l}_i}$ die Spur in $k$ bezeichnet. Hieraus erschließt man leicht die Richtigkeit von

$$(6.) \qquad \left(\frac{\lambda, a}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1} = \zeta^{-S_{\mathfrak{l}_i}\left(\frac{\zeta \log a}{l \lambda}\right)}.$$

Wählt man nämlich ein $\beta \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}$ aus $k$ so, daß

$$\beta = \beta_i' \ (\mathfrak{l}_i) \ ; \qquad \beta = a^{-1} \beta_x' \ (\mathfrak{l}_x) \qquad \text{für } x \neq i$$

ist, so ergibt (5.) für $a\beta$:

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda, a\beta}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1} = \zeta^{-\sum_{i=1}^{n} S_{\mathfrak{l}_i}\left(\frac{\zeta \log a\beta}{l \lambda}\right)}.$$

Hierin hat auf Grund der Eigenschaften von $\beta$ die linke Seite den Wert $\left(\frac{\lambda, a}{\mathfrak{l}_i}\right)$.

---

[1]) Über den zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der $l$-ten Potenzreste in beliebigen algebraischen Zahlkörpern, ds. Journ. Bd. 154, S. 143ff., (s. d. Satz 1).

Rechts wird

$$\log \alpha\beta = \log \alpha + l \log \beta_i \equiv \log \alpha \mod \mathfrak{l}_i^{l+1},$$
$$\log \alpha\beta = l \log \beta_\varkappa \equiv 0 \mod \mathfrak{l}_\varkappa^{l+1} \qquad \text{für } \varkappa \neq i,$$

so daß die rechte Seite gleich $\zeta^{-s_{l_i}\left(\frac{\zeta \log \alpha}{l\lambda}\right)}$ wird, was (6.) ergibt.

Führt man die Ergebnisse (4.) und (6.) in (2.), (3.) ein, so ergibt sich unmittelbar die Formel von Satz 1.

## Beweis für Satz 2.

Der Beweis verläuft analog zu dem vorhergehenden, nur daß hier die Funktion $\varphi_i(\alpha, \beta)$ anders beschaffen ist. Wie ich an früherer Stelle [1]) bewies, gilt für $l = 2$ in Körpern $k$ der betrachteten Art:

$$(7.) \qquad \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_i}\right) = (-1)^{s_i\left(\frac{\alpha-1}{2}\frac{\beta-1}{2}\right)}; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

für beliebige $\alpha, \beta \equiv 1 \mod \mathfrak{l}_i$ aus $k_{l_i}$. Hierin darf auch $S_{l_i}$ für $S_i$ geschrieben werden, da für unsere Grundkörper $k$ die Körper $k_{l_i}$ mit ihren Koeffizientenkörpern zusammenfallen.

Wir verstehen dann in dem vorigen Beweis unter $\varphi_i(\alpha, \beta)$ den Exponenten von $-1$ in (7.) rechts und schließen analog wie bei (2.), (3.), (4.). Die Primzahl $\mathfrak{l}$ von $k_\zeta$ ist dabei durch 2 zu ersetzen.

Um auch die bei (5.) und (6.) durchgeführte Bestimmung des zweiten Faktors rechts in (3.) zu übertragen, setzen wir den zweiten Ergänzungszatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz in rationalen Körpern in die Form:

$$(8.) \qquad \left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{\log a}{4}} \qquad \text{für } a \equiv 1 \mod 2.$$

In der Tat ist für $a = 1 + 2b$:

$$\log a = 2b - \frac{4b^2}{2} + \frac{8b^3}{3} - \frac{16b^4}{4} + \ldots \qquad (2),$$

$$\frac{\log a}{4} \equiv \frac{b}{2} - \frac{b^2}{2} - b^4 \equiv \frac{b}{2} - \frac{b^2}{2} - b \equiv -\frac{b}{2} - \frac{b^2}{2} \equiv \frac{b + b^2}{2} \mod 2$$

und auch $\dfrac{a^2 - 1}{8} = \dfrac{b + b^2}{2}$.

Durch genau die entsprechenden Überlegungen, wie in der a. v. S. Anm. 1 zitierten Arbeit, folgt aus (8.) die für ganz beliebige Grundkörper gültige Formel:

$$(9.) \qquad \left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{s\left(\frac{\log a}{4}\right)} \qquad \text{für } a \equiv 1 \mod 2.$$

Aus (9.) folgt durch dieselben Schlüsse, wie bei (5.), (6.) die Gleichung:

$$(10.) \qquad \left(\frac{2, a}{\mathfrak{l}_i}\right) = (-1)^{s_{l_i}\left(\frac{\log a}{4}\right)},$$

und hieraus durch Eintragen in (2.) und (3.) wie vorhin die Formel des Satzes 2.

---

[1]) Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern für gewisse, nicht-primäre Zahlen, ds. Journ. Bd. 153, S. 200 Mitte.

# Eine Axiomatisierung der Mengenlehre.

Von *J. v. Neumann* in Budapest.

Inhaltsverzeichnis:


| | Seite |
|---|---|
| I. Das Axiomensystem | 219 |
| § 1. Prinzipielles zur Axiomatisierung der Mengenlehre | 219 |
| § 2. Allgemeines über die Axiomatik | 221 |
| § 3. Die Axiome und ihre Bedeutung | 223 |
| § 4. Über die Herleitung der Mengenlehre | 227 |
| II. Untersuchung der Axiome | 229 |
| § 1. Die Fragestellung, Prinzipielles | 229 |
| § 2. Über Teilsysteme | 232 |
| § 3. Die Abzählbarkeit | 234 |
| § 4. Mengenlehrenmodelle | 235 |
| § 5. Kategorizität | 238 |


## I. Das Axiomensystem.

### § 1. Prinzipielles zur Axiomatisierung der Mengenlehre.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, eine logisch einwandfreie axiomatische Darstellung der Mengenlehre zu geben. Ich möchte dabei einleitend einiges über die Schwierigkeiten sagen, die einen derartigen Aufbau der Mengenlehre erwünscht gemacht haben.

Die Mengenlehre hat bekanntlich in ihrer ersten, „naiven“ Fassung, die ihr *Cantor* gab, zu Widersprüchen geführt. Es sind die bekannten Antinomien von der Menge aller Mengen, die sich nicht enthalten (*Russell*), von der Menge aller transfiniten Ordnungszahlen (*Burali-Forti*), von der Menge aller endlich definierbaren reellen Zahlen (*Richard*) [1]). Da die naive Mengenlehre unleugbar zu diesen Widersprüchen führte, aber andererseits ein umgrenzter Teil ihrer Sätze exakt-zuverlässig zu sein schien, und da obendrein die moderne Formulierung der Mathematik auch unbedingt ein mengentheoretisches Fundament benötigte, so hat es an Versuchen zur „Rehabilitation“ der Mengenlehre nicht gefehlt.

Dabei sind grundsätzlich zwei verschiedene Richtungen zu unterscheiden. Eine Reihe von Autoren sah sich durch die Antinomien der Mengenlehre veranlaßt,

[1]) Siehe z. B. *Poincaré*, Wissenschaft und Methode, deutsch von *F.* und *L. Lindemann*, Leipzig-Berlin, 1914.

das gesamte logische Fundament der exakten Wissenschaften einer Kritik zu unterziehen. Sie setzten sich das Ziel, die ganze exakte Wissenschaft auf eine allgemein einleuchtende neue Basis zu stellen, von der das „richtige" in Mathematik und Mengenlehre wieder erreicht werden konnte, aber das Widerspruchvolle vermöge der unmittelbar-anschaulichen Fundierung a priori ausgeschlossen sein mußte. Es sind hier die Herren *Russell*, *J. König*, *Weyl*, *Brouwer* zu nennen [1]). Sie gelangten zu ganz verschiedenen Resultaten, aber der Gesamteindruck ihrer Tätigkeit ist ein geradezu vernichtender. Schon bei *Russell* erscheint die ganze Mathematik und Mengenlehre als auf dem höchst problematischen „Reduzibilitäts-Axiom" beruhend, und *Weyl* und *Brouwer* lehnen konsequent den größten Teil von Mathematik und Mengenlehre als vollkommen sinnlos ab. Es hat sich hier überhaupt keine Rehabilitation der Mengenlehre ergeben, wohl aber eine sehr scharfe Kritik der bisher gebrauchten elementar-logischen Schlußweisen, insbesondere der Prinzipien „vom ausgeschlossenen Dritten", „alle", und „es gibt".

Die andere Gruppe, die Herren *Zermelo*, *Fraenkel* und *Schönflies*, hat von einer so radikalen Revision abgesehen [2]). Die logische Methode wird nicht weiter kritisiert, sondern beibehalten; nur der (zweifellos unbrauchbare) naive Begriff der Menge wird verpönt. Man wendet, um diesen Begriff zu ersetzen, die axiomatische Methode an; d. h. man konstruiert eine Reihe von Postulaten, in denen das Wort „Menge" zwar vorkommt, aber ohne jede Bedeutung. Unter „Menge" wird hier (im Sinne der axiomatischen Methode) nur ein Ding verstanden, von dem man nicht mehr weiß und nicht mehr wissen will, als aus den Postulaten über es folgt. Die Postulate sind so zu formulieren, daß aus ihnen alle erwünschten Sätze der *Cantor*schen Mengenlehre folgen, die Antinomien aber nicht. Das letztere weiß man allerdings bei diesen Axiomatiken nie ganz gewiß. Man sieht nur, daß die bekannten Schlußweisen, die zu ihnen führen, versagen, aber wer weiß, ob es nicht andere gibt? Ein regelrechter Widerspruchsfreiheitsbeweis ist in diesem Zusammenhange offenbar überhaupt undenkbar. Denn die Methode, mit der *Hilbert* die Widerspruchsfreiheit der verschiedenen Geometrien nachwies [3]): Zurückführung auf die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik und Analysis versagt hier. Ein direkter Widerspruchsfreiheitsbeweis (ohne Verschiebung des Problems) würde aber, da noch vieles in der Logik selbst zu klären bleibt, offenbar in den Bereich der oben-

---

[1]) *Russel-Whitehead*, Principia Mathematica, Cambridge 1910—13; *J. König*, Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre, Leipzig 1914 (posthum); *Brouwer*, Intuitionistische Mengenlehre (Jahresbericht der deutschen Math.-Ver. 28, 1920, S. 203—208); *Weyl*, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik (Math. Zeitschrift 10, 1921, S. 39—79).

[2]) *Zermelo*, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I (Math. Analen 65, 1908, S. 261—281, ohne Fortsetzung geblieben); *Fraenkel*, Über den Begriff ‚definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms (Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften 1922, Math.-Phys. Klasse, S. 253—257); Die Axiome der Mengenlehre (Scripta Univ. atque Bibl. Hierosol., Math. et phys., Vol. I.); Einleitung in die Mengenlehre, Berlin 1923 (2. Auflage, S. 184 ff.); Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre (Math. Zeitschrift 22, 1924, S. 250—273); *Schönflies*, Zur Axiomatik der Mengenlehre (Math. Annalen 83, 1921, S. 173—200; Bemerkung zur Axiomatik der Größen u. Mengen (ebenda 85, 1922, 60—64).

[3]) *Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig (mehrere Auflagen seit 1899).

erwähnten ersten Gruppe gehören. Die angekündigten Arbeiten von Herrn *Hilbert* haben ihn zum Ziel [1]).

Diese zweite Gruppe will also unter peinlicher Vermeidung des naiven (*Cantor*schen) Mengenbegriffes ein Axiomensystem angeben, aus dem die Mengenlehre (ohne ihre Antinomien) folgt. Ihre Untersuchungen können das eigentliche Problem zwar niemals so vollständig erledigen, wie die der ersten Gruppe, aber ihr Ziel ist viel klarer und näherliegend. Es kann zwar niemals auf diesem Wege gezeigt werden, daß die Antinomien wirklich ausgeschaltet sind; auch haftet den Axiomen immer viel Willkür an [2]). Aber eines kann hier sicher erreicht werden: Es wird genau angegeben, was der rehabilitierbare Teil der Mengenlehre ist, und worum es sich handelt, wenn in Zukunft von der vollständigen „formalistischen Mengenlehre" gesprochen werden wird.

Die vorliegende Arbeit gehört der zweiten Gruppe an. Im folgenden soll ein System von Postulaten angegeben werden, aus dem die ganze bekannte Mengenlehre logisch einwandfrei folgt. Allerdings ist „logisch einwandfrei" in dem Sinne zu verstehen, in dem dies in der Mathematik bisher verstanden wurde. Es wird nicht versucht werden auch im Sinne des *Brouwer-Weyl*schen Intuitionismus einwandfreie Herleitungen zu machen. Ich möchte indessen bemerken, daß auch das ziemlich leicht (mit einigen unbedeutenden Modifikationen) erreichbar wäre, worauf ich aber prinzipiell verzichte: widerspricht doch die axiomatische Methode an sich dem Wesen des Intuitionismus. (Intuitionistisch hätte höchstens ein Axiomensystem einigen Sinn, für das auch der Widerspruchsfreiheitsbeweis intuitionistisch-korrekt geführt ist. Nach einer Äußerung *Brouwer*s zu schließen nicht einmal das [3]). —

Eine Reihe wesentlicher prinzipieller Fragen werden noch im Teile II behandelt werden, da sie die Kenntnis des Axiomensystems voraussetzen.

## § 2. Allgemeines über die Axiomatik.

Die Aufgabe unserer Axiomatik ist offenbar, alle erwünschten Mengenbildungen durch eine endliche Anzahl rein formaler Operationen (deren Ausführbarkeit eben durch die Postulate garantiert ist) herzustellen. Vermeiden muß man aber die Mengenbildungen durch Zusammenfassung oder Aussonderung von Elementen usw., sowie das bei *Zermelo* noch auftretende unklare Prinzip der „Definität".

Wir ziehen aber vor, nicht die „Menge", sondern die „Funktion" zu axiomatisieren. Der letztere Begriff umfaßt ja gewiß den ersteren. (Genauer: beide

---

[1]) *Hilbert*, Neubegründung der Mathematik I. (Abh. des Math. Seminars der Hamburgschen Univ. 1, 1923, S. 157—175); Die logischen Grundlagen der Mathematik (Math. Annalen 88, 1923, S. 151—165).

[2]) Eine gewisse Rechtfertigung der Axiome ist es freilich, daß sie, wenn man das axiomatisch-sinnlose Wort „Menge" in ihnen im *Cantor*schen Sinne nimmt, in evidente Aussagen der naiven Mengenlehre übergehen. Aber was man aus der naiven Mengenlehre fortläßt — und gerade das ist das Wesentliche zum Umgehen der Antinomien — ist unbedingt willkürlich).

[3]) *Brouwer*, Intuitionistische Mengenlehre (s. o. S. 220, Fußnote 2). Vgl. *Fraenkel*, Die neuen Ideen zur Grundlegung der Analysis und Mengenlehre (Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., 33, 1924, S. 98).

Begriffe sind vollkommen gleichwertig, da die Funktion als Menge von Paaren und die Menge als Funktion mit 2 Werten aufgefaßt werden kann.) Der Grund dieser Abweichung vom gewohnten Vorgehen ist der, daß jede Axiomatisierung der Mengenlehre den Begriff der Funktion benützt (Aussonderungsaxiom, Ersetzungsaxiom, siehe Seite 7 und 11), und dabei ist es formal einfacher, den Begriff der Menge auf den der Funktion zu stützen als umgekehrt. — Das anschauliche Bild des axiomatisierten Systems ist das folgende:

Wir betrachten zwei Bereiche von Dingen, den der „Argumente" und den der „Funktionen". (Beide Worte sind natürlich rein formal ohne jede Bedeutung zu verstehen.) Die beiden Bereiche sind nicht identisch, indessen überdecken sie sich teilweise. (Es gibt „Argument-Funktionen", die beiden Bereichen angehören.)

Nun ist in diesen Bereichen eine 2-Variablen-Operation $[x, y]$ definiert (lies „Wert der Funktion $x$ für das Argument $y$"), deren erste Variable $x$ stets „Funktion" und deren zweite Variable $y$ stets „Argument" zu sein hat. Durch sie wird stets ein „Argument" $[x, y]$ gebildet.

Diese Operation $[x, y]$ entspricht einem Verfahren, das in der Mathematik überall anzutreffen ist: aus einer Funktion $f$ (die von ihren Werten $f(x)$ wohl zu unterscheiden ist!) und einem Argumente $x$ den Wert $f(x)$ der Funktion $f$ für das Argument $x$ zu bilden. Statt $f(x)$ schreiben wir $[f\,x]$, um anzudeuten, daß bei diesem Verfahren auch $f$ (ebenso wie $x$) als Variable zu betrachten ist. Wir ersetzen mit $[x\,y]$ sozusagen sämtliche 1-Variablen Funktionen durch eine einzige 2-Variablen Funktion. Dabei stehen die Elemente des Bereiches der „Funktionen" in Analogie zu den (naiv gedachten) Funktionen, die für die „Argumente" definiert sind und deren Werte „Argumente" sind. (Als „Mengen" werden später unter diesen „Funktionen" $x$ diejenigen ausgezeichnet werden, für die $[x\,y]$ nur 2 gegebene Werte annimmt, wenn $y$ alle „Argumente" durchläuft; vgl. auch § 3 und § 4.)

Für $[x, y]$ gilt übrigens das „Bestimmtheitsaxiom" im folgenden Sinne:

Wenn $a$,$b$ „Funktionen" sind, und für jedes „Argument" $x$ $[a\,x] = [b\,x]$ ist, so ist $a = b$. (Siehe Axiom I. 4.)

Eine „Funktion" $a$ ist also durch ihre „Werte" $[a\,x]$ ganz eindeutig bestimmt, aber es ist gar nicht gesagt, daß man ihr diese „Werte" beliebig vorschreiben kann. (Damit würden wir ja wieder in die naive Mengenlehre zurückfallen.) Es erhebt sich vielmehr die Frage: welche Operationen sind zur Herstellung von Funktionen vorhanden? Sie wird in den Axiomengruppen II—III. beantwortet.

Es tritt aber noch eine Frage auf: Welche „Funktionen" sind gleichzeitig „Argumente"? Offenbar würde es das angenehmste sein, zu antworten: alle. Das würde uns aber bei den in den Axiomengruppen II—III. angeführten Herstellungsarten von „Funktionen" wieder in die Antinomien der naiven Mengenlehre verwickeln: in erster Linie in die *Russell*sche.) Und da wir die genannten Herstellungsmöglichkeiten alle brauchen, so müssen wir auf den Argumentcharakter gewisser Funktionen verzichten.

Diese unvermeidliche Beschränkung erfolgt in der von *Zermelo* gezeigten Richtung:

Wir wählen willkürlich ein „Argument“ $A$ aus, und erklären im wesentlichen, daß die und nur die Funktionen $a$ gleichzeitig Argumente sind, die *nicht zu oft, d. h. für zuviele Argumente* $x$ von $A$ verschiedene „Werte“ $[a\,x]$ annehmen. (Die „Menge“ wird nämlich als 2-wertige Funktion definiert werden, von der der eine Wert $A$ ist. Also ist das die sinngemäße Übertragung des *Zermelo*schen Standpunktes.)

Dabei präzisieren wir dieses „zu oft“ folgendermaßen:

Die „Funktion“ $a$ wird dann und nur dann nicht „Argument“ sein, wenn die Gesamtheit der Argumente $x$, für die $[a\,x] \neq A$ ist, auf die Gesamtheit aller Argumente überhaupt abgebildet werden kann. (Die Abbildung muß aber durch eine unserer „Funktionen“ erfolgen, d. h. sie muß die Form $y = [b\,y]$ haben. Eindeutig muß sie sein, eindeutig-umkehrbar zu sein braucht sie nicht.) (Siehe Axiom IV. 2.)

Diese Definition hat den Vorteil, daß sie den „Argument“-Charakter aller „Funktionen“ $a$ garantiert, die seltener $\neq A$ sind als eine bereits als „Argument“ erkannte „Funktion“ $b$. „Seltener“ bedeutet: daß die Gesamtheit aller $x$, für die $[a\,x] \neq A$ ist, Bild der Gesamtheit aller $x$, für die $[b\,x] \neq A$ ist, (oder eines Teiles davon) ist. Sie enthält also das sog. Aussonderungsaxiom *Zermelo*s und das Ersetzungsaxiom *Fraenkel*s [1]). Aber sie leistet mehr: Sie enthält auch den Wohlordnungssatz und macht dadurch das Auswahlprinzip überflüssig.

Daß der Wohlordnungssatz in diesem neuen Zusammenhange auftritt, beruht auf folgendem: Wir können eine einwandfreie Theorie der Ordnungszahlen aufstellen. Die Gesamtheit aller Ordnungszahlen führt „naiv“ zur *Burali-Forti*schen Antinomie: in unserem System hat das die Konsequenz, daß eine Funktion, die für alle Ordnungszahlen Werte $\neq A$ hat, kein Argument ist. Folglich muß die Gesamtheit aller Ordnungszahlen auf die Gesamtheit aller „Argumente“ abgebildet werden können, und das ergibt natürlich eine Wohlordnung für die Gesamtheit aller „Argumente“. (Diese Schlußweise muß und kann natürlich streng durchgeführt werden).

Ich möchte noch bemerken:

Es mag befremdend wirken, daß bei einer Axiomatisierung der Mengenlehre (entgegen den Ausführungen in § 1) Begriffe wie „Gesamtheit“, „Funktion“ naiv benützt werden. Aber das geschieht nur hier im § 2 zur Veranschaulichung des Systems; im § 3, bei der genauen Formulierung wird natürlich nichts derartiges geschehen.

## § 3. Die Axiome und ihre Bedeutung.

Zum Vorhergehenden ist noch folgendes zu bemerken:

Außer der bereits eingeführten universellen 2-Variablen-Operation $[x, y]$

---

[1]) Das „Ersetzungsaxiom“ läßt sich so ausdrücken: $\mathfrak{M}$ sei eine Menge, $f(x)$ eine (in $\mathfrak{M}$ definierte) Funktion. Dann gibt es eine Menge $\mathfrak{N}$, die alle $f(x)$ für alle Elemente $x$ von $\mathfrak{M}$ enthält. Dieses Axiom stammt von *Fraenkel* (zu den Grundlagen der *Cantor-Zermelo*schen Mengenlehre; Math. Annalen 86, 1922, S. 230—237). Er wies zuerst darauf hin, daß ohne dieses Axiom in der *Zermelo*schen Axiomatik die Existenz von Mengen der Mächtigkeit $\aleph_\omega$ unbeweisbar ist. (In seinen neueren Arbeiten versucht er, allerdings mit einem schwächeren Axiom auszukommen.) Ich glaube sogar, daß ohne dieses Axiom überhaupt keine Ordnungszahlen-Theorie möglich ist.

müssen wir noch eine 2-Variablen-Operation $(x, y)$ einführen (lies: Paar von $x$ und $y$), deren Variable $x, y$ beide „Argumente" zu sein haben, und die selbst ein „Argument" $(x, y)$ herstellt. Ihre wichtigste Eigenschaft ist, daß aus $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ folgt (das kommt unter den Axiomen nicht direkt vor, denn es folgt aus den Axiomen II, 3—4). Diese Operation hat garnicht den fundamentalen Charakter von $[x, y]$; sie ist nur notwendig, weil der Begriff des „Paares" eingeführt werden muß.

Ferner wird von Anfang an außer dem bereits erwähnten „Argumente" $A$ noch ein willkürliches „Argument" $B$ eingeführt werden. ($A, B$ werden nämlich die beiden Werte derjenigen Funktionen sein, die die „Mengen" vertreten.)

Und schließlich werden wir statt von „Argumenten", „Funktionen" und „Argument-Funktionen" stets von „I. Dingen", „II. Dingen" und „I. II. Dingen" sprechen.

Das Axiomensystem lautet so:

Wir beschäftigen uns mit *I. Dingen*, *II. Dingen*, den beiden von einander verschiedenen Dingen $A$, $B$, und den beiden Operationen $[x, y]$, $(x, y)$.

Es gelten die Axiomen:

(Einleitende Axiome)

I. 1. $A$,$B$ sind I. Dinge.

2. $[x, y]$ hat dann und nur dann Sinn, wenn $x$ ein II. Ding und $y$ ein I. Ding ist. Es ist selbst stets ein I. Ding.

3. $(x, y)$ hat dann und nur dann einen Sinn, wenn $x$, $y$ I. Dinge Es ist selbst stets ein I. Ding.

4. $a, b$ seien II. Dinge. Wenn für alle I. Dinge $x$ $[a\,x] = [b\,x]$ ist, so ist $a = b$.

Zu diesen Axiomen ist kein weiterer Kommentar nötig: es war schon von allen im § 2 die Rede.

(Arithmetische Konstruktionsaxiome.)

II. 1. Es gibt ein II. Ding $a$, so daß stets $[a\,x] = x$ ist.

2. $u$ sei ein I. Ding. Es gibt dann ein II. Ding $a$, so daß stets $[a\,x] = u$ ist.

3. Es gibt ein II. Ding $a$, so daß stets $[a\,(x\,y)] = x$ ist.

4. Es gibt ein II. Ding $a$, so daß stets $[a\,(x\,y)] = y$ ist.

5. Es gibt ein II. Ding $a$, so daß stets (wenn x I. II. Ding ist) $[a(x\,y)] = [x\,y]$ ist.

6. $a$,$b$ seien II. Dinge. Es gibt dann ein II. Ding $c$, so daß stets $[c\,x] = ([a\,x], [b\,x])$ ist.

7. $a$,$b$ seien II. Dinge. Es gibt dann ein II. Ding $c$, so daß stets $[c\,x] = [a\,[b\,x]]$ ist.

Dies sind alles Herstellungsweisen für Funktionen. Sie sind so zusammengestellt worden, daß die Funktionen in einem gewissen Sinne eine Gruppe bilden. Sie haben nämlich den folgenden Satz zur Folge (auf dessen ganz einfachen Beweis wir nicht eingehen):

***Reduktion.*** $\mathfrak{A}(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ sei ein Ausdruck der aus den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und irgendwelchen konstanten $a_1, a_2, \ldots$ (I. oder II. Dingen) mit Hilfe der Operationen $[x, y]$ und $(x, y)$ aufgebaut ist. Ein solcher Ausdruck braucht, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ I. Dinge sind, nicht immer Sinn zu haben (z. B. $[x_1, x_2]$ nur wenn $x_1$ I. II. Ding ist), aber wenn er Sinn hat, so sei vorausgesetzt, daß er ein I. Ding ist. (Damit wird der Fall ausgeschlossen, daß $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einfach eine Konstante $a$ ist, die II. Ding aber nicht I. Ding ist.)

Dann gibt es ein II. Ding $a$, so daß für alle I. Dinge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für die $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Sinn hat $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$= [a((\ldots((x_1 x_2) x_3)\ldots) x_n)]$ ist.

Damit haben wir in $[a((\ldots((x_1 x_2) x_3)\ldots) x_n)]$ eine Normalform für die $n$-Variablen-Ausdrücke gewonnen: es ist die allgemeine $n$-Variablen Funktion, so wie $[a x]$ die allgemeine 1-Variablen Funktion ist.

(Logische Konstruktionsaxiome).

III. 1. Es gibt ein II. Ding $a$, so daß $x = y$ mit $[a(x y)] \neq A$ gleichbedeutend ist.

2. $a$ sei ein II. Ding. Es gibt dann ein II. Ding $b$, so daß dann und nur dann $[b x] \neq A$ ist, wenn für alle $y$ $[a(x y)] = A$ ist.

3. $a$ sei ein II. Ding. Es gibt dann ein II. Ding $b$, so daß immer, wenn für ein einziges $y$ $[a(x y)] \neq A$ wird, $[b x] =$ diesem $y$ ist.

Diese Herstellungsweisen für Funktionen ergänzen diejenigen der Gruppe II. Sie ermöglichen, daß jede logische Bedingung für die I. Dinge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf die Normalform $[a((\ldots((x_1 x_2) x_3) x_n)] \neq A$ gebracht werden könne; und daß jedes I. Ding $y$, das logisch eindeutig durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmt ist, auch auf die Normalform $[a((\ldots((x_1 x_2) x_3) \ldots) x_n)]$ gebracht werde. Denn III. 1. ermöglicht das „auf die Normalform bringen" für die Identitätsrelation $x = y$; III. 2. für die Begriffe „alle" und „es gibt". III. 3. erlaubt schließlich die explizite Darstellung $y = [b x]$ des durch eine eindeutige implizite Bedingung $[a(x y)] \neq A$ bestimmten $y$.

Übrigens sind die Axiome der Gruppe II. zwar voneinander unabhängig, aber sie sind es nach Hinzunahme der Gruppe III. nicht mehr: So folgt z. B. aus III. 1. und III. 3. das Axiom II. 1.

(I. II. Dinge).

IV. 1. Es gibt ein II. Ding $a$, so daß ein I. Ding $x$ dann und nur dann ein I. II. Ding ist, wenn $[a x] \neq A$ ist

2. Ein II. Ding $a$, ist dann und nur dann kein I. II. Ding, wenn es ein II. Ding $b$ gibt, so daß zu jedem I. Dinge $x$ ein $y$ mit $[a y] \neq A$, $[b y] = x$ existiert.

Wir haben hier zwei formal analoge Axiome: IV. 1. gibt an, wann ein I. Ding, und IV. 2. wann ein II. Ding I. II. Ding ist. Dem Inhalte nach sind aber IV. 1. und IV. 2. grundverschieden.

In IV. 1. hätten wir einfacher verlangen können, daß jedes I. Ding I. II.

Ding sei. (D. h. daß alle betrachteten Dinge Funktionen sind. *Zermelo* macht keine solche Einschränkung wohl aber *Fraenkel*; davon wird noch im Teile II. die Rede sein.) Wir halten aber zunächst die Axiome möglichst allgemein; auf diese und weitere Restriktionen gehen wir noch im Teile II. ein. IV. 1. verlangt aber nichts Meritorisches, nur daß die Eigenschaft des I. Dinges „I. II. Ding zu sein", wie jede andere Eigenschaft, auf die Normalform gebracht werden könne.

Demgegenüber ist IV. 2. ein sehr wesentliches und folgenreiches Axiom. Es war von ihm schon in § 2. die Rede; aus ihm folgen das Aussonderungsaxiom *Zermelo*s, das Ersetzungsaxiom *Fraenkel*s und der Wohlordnungssatz. Bei *Zermelo* und *Fraenkel* wird kein solches allgemeines Kriterium zur Entscheidung dessen, wann eine Menge „zu groß" ist, benützt. Auch wird, von ihnen abweichend, der Wohlordnungssatz hieraus und nicht aus dem Auswahlprinzip (Multiplikationsaxiom bei *Zermelo*) gewonnen.

Für die folgende Gruppe von Axiomen ist es praktisch (aber keineswegs notwendig) die folgenden Zeichen zu definieren:

$a$ sei ein II. Ding. Für $[a\,x] \neq A$ schreiben wir auch $x \varepsilon a$.

$a, b$ seien II. Dinge. Wenn aus $x \varepsilon a$ $x \varepsilon b$ folgt, so ist $a \lesssim b$. Für $b \lesssim a$ schreiben wir auch $a \gtrsim b$.

Wenn $a \lesssim b$ und $a \gtrsim b$ ist, so schreiben wir $a \sim b$. Wenn $a \lesssim b$, aber nicht $a \gtrsim b$ ist, so schreiben wir $a < b$; wenn nicht $a \lesssim b$, aber $a \gtrsim b$, so schreiben wir $a > b$. (Vgl. auch § 4.)

(Unendlichkeitsaxiome)

V. 1. Es gibt ein I. II. Ding $a$ mit den folgenden Eigenschaften:
Es gibt I. II. Dinge $x$ mit $x \varepsilon a$. Wenn für ein I. II. Ding $x$ $x \varepsilon a$ ist, so gibt es I. II. Dinge $y \varepsilon a$, für die $x < y$ ist.

2. $a$ sei ein I. II. Ding. Es gibt dann ein I. II. Ding $b$, für welches aus $x \varepsilon y$, $y \varepsilon a$ ($y$ also I. II. Ding.) $x \varepsilon b$ folgt.

3. $a$ sei ein I. II. Ding. Es gibt dann ein I. II. Ding $b$ mit der folgenden Eigenschaft:
Wenn für ein I. II. Ding $x$ $x \lesssim a$ ist, so gibt es ein I. II. Ding $y$, für welches $x \sim y$, $y \varepsilon b$ ist.

Diese drei verhältnismäßig komplizierten Axiomen treten bei *Zermelo* und *Fraenkel* auch auf und zwar als „Axiom des Unendlichen" (V. 1.), „der Vereinigung" (V. 2.), und „der Potenzmenge" (V. 3. ). Wir nennen aber alle drei Unendlichkeitsaxiome, weil sie nur bei der spezifischen Theorie der unendlichen Mächtigkeiten notwendig sind. Nicht nur die Theorie der endlichen Mengen und Ordnungszahlen (d. h. der nichtnegativen ganzen Zahlen) sondern sogar teilweise die des Kontinums können ohne sie, allein auf Grund der Axiome der Gruppen I.—IV. aufgebaut werden.

Es sind Herstellungsweisen für I. II. Dinge (analog zu den Gruppen II. III., die es für II. Dinge waren). Ihr Sinn ist (naiv formuliert) ungefähr der folgende:

Es gibt eine nicht zu große unendliche Menge $a$.

Wenn $a$ eine nicht zu große Menge nicht zu großer Mengen ist, so ist auch die Menge $b$ der Elemente der Elemente von $a$ nicht zu groß.

Wenn $a$ eine nicht zu große Menge ist, so ist auch die Menge $b$ aller Teilmengen von $a$ nicht zu groß.

Freilich wird die Formulierung dadurch, daß nicht von Mengen, sondern von Funktionen gesprochen wird, etwas kompliziert (besonders V. 3.); immerhin folgt mit Hilfe der Axiome der Gruppe V. leicht (sobald der Begriff „Menge" als Spezialfall von „Funktion" streng definiert ist) die Existenz unendlicher Mengen, sowie die der Vereinigungs- und Potenzmengen. Das Axiom V. 1. weicht übrigens von der Fassung von *Zermelo* (und *Fraenkel*) für die Unendlichkeit ab: Es wird in ihm die Existenz irgendeiner unendlichen Menge verlangt und nicht die einer speziellen, wie dort. Dieser Umstand ist aber belanglos.

Diese Axiome der Gruppen I.—V. bilden unser Axiomensystem. Die Gruppierung und Formulierung weicht äußerlich von *Zermelo* und *Fraenkel* weitgehend ab; trotzdem sind viele Analogien vorhanden. Besonders beim Vergleiche mit den *Fraenkel*schen Axiomen und Definitionen sieht man, daß die meisten unserer Axiome Analoga bei ihm haben. Indessen sind ganz wesentliche Unterschiede auch vorhanden. Daß von „Funktionen" statt von „Mengen" geredet wird, ist wohl oberflächlich; wesentlich aber ist, daß auch „zu große" Mengen (bezw. „Funktionen") Gegenstand dieser Mengenlehre sind, nämlich diejenigen II. Dinge, die keine I. II. Dinge sind. Anstatt sie gänzlich zu verbieten, werden sie nur für unfähig erklärt Argumente zu sein (sie sind keine I. Dinge!). Zum Vermeiden der Antinomien reicht das aus und ihre Existenz ist für gewisse Schlußweisen notwendig. Ganz wesentlich von *Zermelo* und *Fraenkel* abweichend, ja direkt für unsere Axiomatik charakteristisch ist schließlich das Axiom IV. 2. Zwar steht es in einer gewissen Beziehung zum Aussonderungs- und zum Ersetzungsaxiom, aber es ist viel weitergehend. Einerseits garantiert es die Existenz der Teilmengen und Bildmengen, und ermöglicht überhaupt die Theorie der Ordnungszahlen und Alephs (die in einem Axiomensystem, in dem das Ersetzungsaxiom fehlt, kaum gelingen kann), doch das ist im wesentlichen nur die Leistung des Ersetzungsaxioms. Aber darüber hinausgehend nimmt es eine ganz zentrale Stellung im Axiomensystem ein; es ermöglicht in mehreren Fällen den Nachweis dafür, daß eine Menge „nicht zu groß" ist, und schließlich ergibt es den Wohlordnungssatz.

Freilich verlangt dieses Axiom IV. 2. etwas mehr als bisher für den Begriff „nicht zu groß" für selbstverständlich und billig erachtet wurde. Man könnte sagen, daß es dem Bogen etwas überspannt. Aber bei der Verworrenheit des landläufigen Begriffes „nicht zu groß" einerseits und bei der außergewöhnlichen Leistungsfähigkeit dieses Axioms andererseits glaube ich mit seiner Einführung keinen zu krassen Willkürakt begangen zu haben. Umso mehr, als es den Bereich der Mengenlehre eher erweitert als einschränkt, und trotzdem kaum eine Quelle von Antinomien werden kann. (Auf diesen letzten Punkt gehen wir im Teile II. näher ein.)

## § 4. Über die Herleitung der Mengenlehre.

In den §§ 2—3 wurde eine Axiomatisierung der Mengenlehre beschrieben, unter Hervorhebung der prinzipiellen Gesichtspunkte, die bei ihrer Aufstellung maßgebend waren. Im folgenden soll einiges über die Herleitung der Mengenlehre aus diesen Axiomen gesagt werden.

Eine solche Herleitung der Mengenlehre würde sich folgendermaßen gliedern:

### 1. Allgemeine Mengenlehre.

Hier sind diejenigen allgemeinen Sätze und Definitionen zu erledigen, die mehr aus dem Wesen der Axiomatik als dem der Mengenlehre fließen, solche, die in der naiven Mengenlehre ganz trivial sind. Es sind Sätze wie die Existenz der Vereinigungsmenge und des Durchschnittes von Mengen, die Existenz der Potenzmenge usw. Es ist hier weder von Ordnung noch von Mächtigkeiten die Rede.

### 2. Ordnung und Wohlordnung.

Es wird definiert, was unter diesen Begriffen, ferner unter gewissen Hilfsbegriffen, wie Ähnlichkeit, Abschnitt (Anfangsstück) usw. zu verstehen ist. Einige ganz triviale Sätze über Ordnung und Wohlordnung folgen, z. B.: Sind zwei geordnete Mengen einer dritten ähnlich, so sind sie auch einander ähnlich; ist von zwei ähnlichen geordneten Mengen die eine wohlgeordnet, so ist auch es die andere; usw.

### 3. Ordnungszahlen.

Hier fängt die eigentliche Theorie an. Eine strenge Definition der Ordnungszahlen wird angegeben und anschließend werden die wichtigsten Eigenschaften dieser Ordnungszahlen entwickelt; u. a. die Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Mengen und die Zulässigkeit der Definition durch transfinite Induktion [1]).

### 4. Wohlordnungssatz.

Mit Hilfe der Ordnungszahlen und des Axioms IV: 2. wird (ohne Auswahlprinzip) der Wohlordnungssatz bewiesen.

### 5. Mächtigkeiten.

Nachdem die Theorie der Ordnungszahlen und der Wohlordnungssatz vorliegen, kann auch die Theorie der Alephs (Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten) leicht entwickelt werden. (Diese Gruppierung der Mächtigkeiten erst nach der Wohlordnung ist von der allgemein üblichen abweichend. Sie führt aber schneller zum Ziele.)

### 6. Unendlichkeit.

Schließlich folgt die Definition der Endlichkeit und Unendlichkeit von Mengen. Die einfachsten Eigenschaften von Endlichkeit und Unendlichkeit werden entwickelt und die Existenz unendlicher Mengen nachgewiesen. Die kleinste unendliche Ordnungszahl $\omega$ wird definiert.

Wir wollen im folgenden diese (bereits fertig vorliegende) Herleitung nicht durchführen. Sie würde mit allen Beweisen sehr viel Raum einnehmen und den Rahmen dieser Darstellung übersteigen. Sie soll in einer anderen Arbeit detailliert auseinandergesetzt werden.

Hier seien nur die wichtigsten Bezeichnungen angeführt.

---

[1]) Vgl. *J. Neumann,* Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen. (Acta Litterarum ac Scientiarum regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scient Math. Tom. I Fasc. IV, 1923. S. 199—208.) Szeged.

Die genaue Definition von „Menge" (als Spezialfall von „Funktion") lautet so:

Ein II. Ding $a$ heißt ein *Bereich*, wenn stets $[a\,x] = A$ oder $= B$ ist.

Ein I. II. Ding heißt in diesem Falle eine *Menge*.

D. h. „Menge" heißen (in der früheren Terminologie) die „nicht zu großen" Mengen, und „Bereiche" sind alle Gesamtheiten ohne Rücksicht auf ihre „Größe". Ein Bereich ist dann und nur dann „argumentfähig" (d. h. I. II. Ding), wenn er Menge ist.

Die Definitionen der Relationen $x \varepsilon a$ ($x$ gehört zu $a$, $x$ ist Element von $a$, $a$ enthält $x$), $a \lesssim b$ ($a$ ist Teil von $b$), $a < b$ ($a$ ist echter Teil von $b$), $a \sim b$ ($a$, $b$ sind gleich groß) sind schon im § 3 angegeben worden. (Wenn $a$ und $b$ Bereiche sind, so folgt aus $a \sim b$ wegen I. 4 natürlich $a = b$; für allgemeine II. Dinge ist diese Folgerung hingegen nicht notwendig.

Wenn $a$, $b$ Bereiche sind, so sind $a + b$, $a \,.\, b$, $a - b$ deren Summen-, Durchschnitts-, bzw. Differenzbereiche (in demselben Sinne, wie dies in der naiven Mengenlehre verstanden wird; natürlich müssen für alle diese Bereiche zuerst die Existenzbeweise gebracht werden; das gilt auch im folgenden). Wenn $a$ ein Bereich ist und seine Elemente Mengen sind, so sind $S(a)$, $D(a)$ der Vereinigungs-, bzw. Durchschnittsbereich (der Elemente) von $a$. Ist $a$ ein Bereich und $c$ ein II. Ding, so ist $[c, a]$ das durch $c$ vermittelte Bild von $a$. Ist schließlich $a$ ein Bereich, so ist $P(a)$ der Potenzbereich von $a$ (der alle Teil*mengen* von $a$ enthält; Bereiche die keine Mengen sind, sind ja „argumentunfähig"). Übrigens ist, wenn $a$, $b$ Mengen sind, auch $a + b$ eine Menge, wenn $a$ oder $b$ eine Menge ist, auch $a \cdot b$ eine Menge, und wenn $a$ eine Menge ist, auch $S(a)$, $D(a)$, $P(a)$ Mengen.

Wenn $a$ ein Bereich ist, so nennen wir alle Bereiche $b$ *Ordnungen* von $a$, die die folgende Eigenschaft haben:

Jedes $x$ Element von $b$ hat die Form $x = (u\,v)$, $u \varepsilon a$, $v \varepsilon a$, $u \neq v$.

Wenn $u, v$ zwei voneinander verschiedene Elemente von $a$ sind, so gehört $(uv)$ oder $(vu)$ zu $a$.

Wenn $(uv)$, $(vw)$ zu $b$ gehören, so gehört auch $(uw)$ zu $b$.

Wenn $(uv)$ zu $b$ gehört, so schreiben wir auch $u \overset{(b)}{<} v$ oder $v \overset{(b)}{>} u$ ($u$ liegt bei der Ordnung $b$ vor $v$, $v$ liegt bei der Ordnung $b$ nach $u$).

Wenn $a$ sogar eine Menge ist, so sind alle seine Ordnungen Mengen und sie bilden auch eine Menge $O(a)$.

Die übrigen Definitionen (Ähnlichkeit, Wohlordnung, Ordnungszahl, Mächtigkeit, Äquivalenz, Endlichkeit und Unendlichkeit) führen wir hier nicht mehr an, sie liegen teilweise auf der Hand. Die Theorie der Ordnungszahlen, die hier in Frage kommt, habe ich bereits in einer anderen Arbeit auseinandergesetzt (siehe Fußnote[1]) auf S. 228). (Allerdings in der Terminologie der naiven Mengenlehre; aber die Übertragung in diese Axiomatik bereitet weiter keine Schwierigkeiten.)

## II. Untersuchung der Axiome.

### § 1. Die Fragestellung, Prinzipielles.

Aus den Axiomen, wie sie im Teile I. auseinandergesetzt wurden, folgen die bekannten Sätze der Mengenlehre restlos; andererseits sind aber diese Axiome

(insofern sie nicht einschränkender Art sind) nichts als triviale Tatsachen der naiven Mengenlehre. In diesem Sinne könnten wir also sagen, daß durch unsere Axiome weder zuviel noch zu wenig gefordert wurde.

Indessen wäre eine solche Feststellnug aus mehreren Gründen nicht stichhaltig. Der erste Grund ist der folgende:

Unsere Axiome ermöglichen zwar die bekannten Mengenbildungen $a + b$, $S(a)$, $P(a)$, $[c, a]$ und die „Aussonderung" (wobei die endlichen und die abzählbaren Mengen den Ausgangspunkt bilden), aber sie garantieren nicht, daß es außer den so gewonnenen Mengen nicht noch weitere gibt, die auf diesem Wege unerreichbar sind. Es könnten a priori auch sehr gut Mengen von dieser Art existieren. Z. B. wenn eine Menge $a$ ein einziges Element hat und dieses sie selbst ist: $a = (a)$; oder eine „absteigende Mengenfolge": $a_1 = (a_2)$, $a_2 = (a_3)$, ... ($(a)$ bedeutet die Menge mit dem einzigen Elemente $a$) [1]). Es wäre nun erwünscht, alle diese überflüssigen Mengenbildungen zu beseitigen, und das leisten unsere bisherigen Axiome sicherlich nicht.

Um diese Lücke zu füllen, hält *Fraenkel* die Einführung eines weiteren, noch nicht genau formulierten Axioms für wünschenswert (Beschränktheitsaxiom), zu dem unsere Axiome kein Analogon bieten und das etwa so lauten würde:

> Außer den Mengen (bezw. I. und II. Dingen), die auf Grund der Axiome unbedingt existieren müssen, gibt es keine weiteren Mengen.

Wir wollen dieses Axiom in unserem Formalismus präzis fassen. Hierzu definieren wir:

> Das System der I. und II. Dinge sei $\Sigma$. $\Sigma'$ sei ein Teilsystem von $\Sigma$. $\mathrm{I}_{\Sigma'}$, oder $\mathrm{II}_{\Sigma'}$, Dinge seien alle I. bzw. II. Dinge aus $\Sigma'$. $(x, y)_{\Sigma'}$ ($x$ ein $\mathrm{II}_{\Sigma'}$, $y$ ein $\mathrm{I}_{\Sigma'}$ Ding) bedeute $[x, y]$, $(x, y)_{\Sigma'}$ ($x, y$ $\mathrm{I}_{\Sigma'}$ Dinge) bedeute $(x, y)$, $A_{\Sigma'}$, sei $A$, $B_{\Sigma'}$, sei $B$.
>
> Wenn nun diese $\mathrm{I}_{\Sigma'}$, $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ Dinge, die Operationen $[x, y]_{\Sigma'}$, $(x, y)_{\Sigma'}$ und die Dinge $A_{\Sigma'}$, $B_{\Sigma'}$ unseren Axiomen auch genügen, so sagen wir kurz, daß $\Sigma'$ unseren Axiomen genügt.

Das erwähnte Beschränktheitsaxiom verlangt nun einfach:

> Außer $\Sigma$ selbst soll kein anderes Teilsystem $\Sigma'$ von $\Sigma$ den Axiomen I.—V. genügen.

In dieser Formulierung wird es nun klar, daß gegen ein derartiges Axiom (das gilt natürlich ebenso in dem *Fraenkel*schen Systeme) sofort zwei ernste Einwände geltend gemacht werden können.

Erstens ist dieses Axiom von einem ganz anderen Typus als die früheren, da es im Gegensatze zum bisherigen Prinzip die naiv mengentheoretischen Begriffsbildungen nicht vermeidet. Denn was sollen wir unter „Teilsystemen" von $\Sigma$ verstehen? Mengen oder Bereiche im Sinne der früheren Axiome keinesfalls, denn die können nur I. Dinge als Elemente haben, während $\Sigma'$ und $\Sigma$ I. und II. Dinge enthalten. Was bleibt aber dann übrig, da doch der naive Mengenbegriff streng

---

[1]) *Mirimanoff*, Les Antinomies de *Russell* et *Burali-Forti* (L'Enseigment Mathématique XIX-e année 1917, Seite 42).

verboten sein sollte? Solch ein Axiom würde das ganze Axiomatisieren zu einem Zirkel machen!

Diese Schwierigkeit wäre indes zu beheben, indem wir etwa annehmen würden, es läge ein größeres System $P$ (von $\mathrm{I}_P$, $\mathrm{II}_P$ Dingen, mit Operationen $[xy]_P^{\cdot}$, $(xy)_P$, und zwei Dingen $A_P$, $B_P$, welches unseren Axiomen I.—V. auch genügte) vor, derart, daß alle I. und II. Dinge $\mathrm{I}_P$ Dinge sind, und $[xy]$, $(xy)$ in $P$ beide auf die dortige Normalform $[a(xy)_P])$ $a$ ein $\mathrm{II}_P$ Ding) gebracht werden können. Dann ist $\Sigma$ ein Bereich in $P$ und seine „Teilsysteme" $\Sigma'$ sind einfach als seine Teilbereiche (in $P$) aufzufassen. Wir hätten eine „höhere Mengenlehre" $P$ über $\Sigma$ gelagert, in der auch Dinge, die in $\Sigma$ argumentunfähig sind, Argumente sind. Das ist an sich nicht absurd: Wenn wir die „zu großen" argumentunfähigen Mengen in einem neuen Systeme $P$ argumentfähig machen, so können wir die Antinomien noch immer umgehen, wenn wir die aus diesen allen gebildeten „noch größeren" (d. h. in $P$ zu großen) Mengen ihrerseits zulassen, aber als argumentunfähig erklären. Die Idee ist teilweise dieselbe wie die, die der *Russel*schen „Stufenbildung" zu Grunde liegt.

In einer solchen „höheren Mengenlehre" $P$ hätte es also einen Sinn zu fragen, ob das erwähnte Bestimmtheitsaxiom (für die „niedrigere Mengenlehre" $\Sigma$) erfüllt ist. Im folgenden werden wir der Einfachheit halber zwar die Terminologie der naiven Mengenlehre anwenden, aber man wird dabei stets sich vergegenwärtigen müssen, daß die Existenz eines „höheren" Systems $P$ angenommen ist. Ohne eine solche Hypothese (die noch etwas problematischer ist als die von der Widerspruchfreiheit der Mengenlehre) kann man eben keine Untersuchung der den Axiomen genügenden Systeme $\Sigma'$ vornehmen, es sei denn, daß man sich kritiklos in die Terminologie der (widerspruchvollen) naiven Mengenlehre finden will.

Und nun tritt die zweite Schwierigkeit auf. Daß ein System, welches den Axiomen I.—V. genügt, das Beschränktheitsaxiom nicht zu erfüllen braucht, ist leicht nachweisbar (vgl. oben). Man müßte daher etwa das folgende wissen:

> Wenn das System $\Sigma$ den Axiomen I.—V. genügt, so kommt unter seinen Teilsystemen $\Sigma'$, die denselben auch genügen, mindestens ein kleinstes vor, d. h. eines mit der folgenden Eigenschaft: Außer $\Sigma'$ selbst genügt kein Teilsystem von $\Sigma'$ den Axiomen I.—V.

Dieses Teilsystem würde also dem Beschränktheitsaxiom genügen. Ein solches kleinstes Teilsystem könnte z. B. der gemeinsame Teil (Durchschnitt) aller den Axiomen I.—V. genügenden Teilsysteme $\Sigma'$ von $\Sigma$ sein (nämlich falls dieser den Axiomen I.—V. wieder genügen sollte). Allerdings braucht er es nicht zu sein. Nun zeigt aber eine nähere Untersuchung, daß der einzige bekannte Weg zur Herstellung eines solchen Teilsystems versagt. Wir werden später den Umstand nennen, an dem das liegt. Aus diesen Gründen glauben wir folgern zu müssen, daß erstens das Beschränktheitsaxiom unbedingt zu verwerfen ist, und daß es zweitens überhaupt nicht gelingen kann, ein Axiom mit demselben Effekte zu formulieren. Dies hängt übrigens auch mit der fehlenden „Kategorizität" des Axiomensystems I.—V. zusammen, von der noch in § 5 die Rede sein wird.

Aber wenn es auch nicht gelingen kann, ein kleinstes den Axiomen I.—V. genügendes Teilsystem von $\Sigma$ zu finden, so wollen wir doch sehen, welche

den Axiomen I.—V. genügende Teilsysteme von $\Sigma$ existieren können. Wir stoßen dabei auf eine höchst eigentümliche Erscheinung, die zuerst von *Löwenheim* und *Skolem* [1]) bemerkt wurde.

## § 2. Über Teilsysteme.

Es liege ein Teilsystem $\Sigma'$ vor. Wir wollen nun die Bedingung, daß $\Sigma'$ den Axiomen genügt, genau formulieren.

Für die Axiome I. 1, 2, 3, ist dies ganz leicht. Sie lauten seinfach so:

1. $A$, $B$ gehören zu $\Sigma'$.
2. Wenn $x$, $y$ zu $\Sigma'$ gehören, so gehört auch $[x, y]$ und $(x, y)$ zu $\Sigma'$.

Für II. 1—7, III. 1., IV,. 1. besteht eine gewisse Schwierigkeit. II. 1. verlangt z. B.:

> Ein II. Ding $a$ gehöre zu $\Sigma'$, für welches für alle II. Dinge $x$ von $\Sigma'$ $[ax] = x$ ist.

Analog bei II. 2.—IV. 1. Um das zu vermeiden, verlangen wir aber einfach stets etwas mehr, nämlich:

3. Ein II. Ding $a$, für das stets (d. h. für alle I. Dinge aus $\Sigma$, ebenso in folgenden): $[ax] = x$ ist, gehört zu $\Sigma'$.
4. Das I. Ding $u$ gehöre zu $\Sigma'$. Dann gehört ein II. Ding $a$, für das stets $[ax] = u$ ist, zu $\Sigma'$.
5. Ein II. Ding $a$, für das stets $[a(xy)] = x$ ist, gehört zu $\Sigma'$.
6. Ein II. Ding $a$, für das stets $[a(xy)] = y$ ist, gehört zu $\Sigma'$.
7. Ein II. Ding $a$, für das stets $[a(xy)] = [xy]$ ist, gehört zu $\Sigma'$.
8. Wenn die II. Dinge $a$, $b$ zu $\Sigma'$ gehören, so gehört ein II. Ding $c$, für das stets $[cx] = ([ax]\,[b\,x])$ ist, zu $\Sigma'$.
9. Wenn die II. Dinge $a$, $b$ zu $\Sigma'$ gehören, so gehört ein II. Ding $c$, für das stets $[cx] = [a[bx]]$ ist, zu $\Sigma'$.
10. Ein II. Ding $a$, für das $[a(xy)] \neq A$ mit $x = y$ gleichbedeutend ist, gehört zu $\Sigma'$.
11. Ein II. Ding $a$, für das $[ax] \neq A$ damit gleichbedeutend ist, daß $x$ ein I. II. Ding ist, gehört zu $\Sigma'$.

(Daß solche II. Dinge überhaupt vorhanden sind, garantieren die entsprechenden Axiome II. 1.—IV. 1.) Von hier an haben wir also hinreichende, aber nicht mehr notwendige Bedingungen. Und damit schwindet die Möglichkeit, ein kleinstes

---

[1]) *Löwenheim*, Über Möglichkeiten im Relativkalkül (Mathemat. Annalen 76, 1915, *S.* 447—470); *Skolem*, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweiskraft mathematischer Sätze ...); Didenskapsselskapets Skrifter 1. Mat. Naturv. Klasse 1920. No. 4. Christiania; Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre (Mathematiker Kongressen i Helsingfors, Helsingfors 1923, Seite 217—232); Vgl. hierzu *Fraenkel*, Zitat von Fußnote 6.

In den beiden ersten Arbeiten wird der Satz allgemein bewiesen, dessen Spezialfall für die Mengenlehre den Gegenstand des folgenden § 2 bildet: Jedes überhaupt erfüllbare Axiomensystem ist bereits durch abzählbare Systeme erfüllbar. In der letzten Arbeit zieht *Skolem* hieraus die (ungünstigen) Konsequenzen für die Mengenlehre.

Trotzdem also der Inhalt der §§ 2 und 3 nicht neu ist, glauben wir, daß es nicht unnütz ist, auf diesen interessanten Umstand wieder eingehend hinzuweisen.

Teilsystem zu finden, daß den Axiomen genügt: Denn die zu formulierenden Bedingungen gehen alle zu weit.

Eine weitere Schwierigkeit tritt bei den Axiomen III. 2, 3. auf. Betrachten wir z. B. II. 2; es lautet so:

> Das II. Ding $a$ gehöre zu $\Sigma'$. Es gibt dann ein II. Ding $b$ in $\Sigma'$, so daß für alle I. Dinge $x$ in $\Sigma'$ $[bx] \neq A$ damit gleichbedeutend ist, daß für alle I. Dinge $y$ in $\Sigma'$ $[a(xy)] = A$ ist.

Wieder geht $\Sigma'$ in die Definition des $b$ ein, das zu ihn gehören soll; denn um zu wissen, ob etwas „für alle I. Dinge $y$ in $\Sigma'$" gilt, muß man ja ganz $\Sigma'$ kennen. Indessen kann man diese Schwierigkeit überwinden, indem man erzwingt, daß in den in Betracht kommenden Fällen „für alle I. Dinge $y$ in $\Sigma'$" dasselbe bedeutet wie „für alle I. Dinge $y$". Und das erreicht man einfach folgendermaßen:

(Vorbereitende Bedingung.)

> 12. Das II. Ding $a$ und das I. Ding $x$ sollen beide zu $\Sigma'$ gehören. Wenn es überhaupt ein I. Ding $y$ mit $[a(xy)] \neq A$ gibt, so soll auch mindestens ein derartiges $y$ zu $\Sigma'$ gehören.

Und nun können wir für III. 2. verlangen (und zwar wieder wie bei II. 1.—IV. 1. etwas zu viel):

(Hauptbedingung.)

> 13. Das II. Ding $a$ gehöre zu $\Sigma'$. Ein II. Ding $b$, für das stets $[bx] \neq A$ damit gleichbedeutend ist, daß stets $[a(xy)] = A$ ist, gehört dann zu $\Sigma'$.

Bei III. 3. ist die Lage dieselbe. Damit hier die „Einzigkeit" des $y$ gefaßt werde, muß zur „vorbereitenden Bedingung" 12. noch die folgende hinzugenommen werden.

> 14. Das II. Ding $a$ und die I. Dinge $x$, $y$ mögen zu $\Sigma'$ gehören. Wenn $[a(xy)] \neq A$ ist und wenn ein $y'$ mit $[a(xy')] \neq A$, $y' \neq y$ existiert, so gehört auch ein solches $y'$ zu $\Sigma'$.

Und nun lautet die Hauptbedingung:

> 15. Das II. Ding $a$ gehöre zu $\Sigma'$. Dann gehört ein II. Ding $b$ zu $\Sigma'$, für welches immer, wenn für ein einziges $y$ $[a(xy)] \neq A$ ist, $[bx] = y$ ist.

Bei Axiom I. 4. brauchen wir wieder eine „vorbereitende Bedingung":

> 16. Die II. Dinge $a$, $b$ gehören zu $\Sigma'$,. Wenn es ein $x$ mit $[ax] \neq [bx]$ gibt, so gehört auch ein solches $x$ zu $\Sigma'$.

Eine Hauptbedingung ist hier nicht nötig, da keine Existenz verlangt wird. (Alle diese Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig.)

Schließlich bleiben die Axiome IV. 2., V. 1.—3. übrig. Hier müssen auch entsprechende vorbereitende Bedingungen 17.—19. (für IV. 2., da 3 mal „alles" und „es gibt" superponiert sind), 20.—21. (für V. 1.), 22 (für V. 2.), 23 (für V. 3.) formuliert werden, die wir nicht einzeln anführen wollen.

Was die Hauptbedingungen betrifft, so ist für die eine Hälfte von IV. 2. (wenn $a$ kein I. II. Ding ist, so gibt es ein $b$, so daß usw.) eine notwendig. Sie lautet so

> 24. $a$ sei ein II. Ding, das kein I. II. Ding ist, und gehöre zu $\Sigma'$. Dann gehört ein II. Ding $b$ zu $\Sigma'$, für welches zu jedem $x$ ein $y$ mit $[ay] \neq A$, $[by] = x$ existiert.

Für die andere Hälfte von IV. 2. (wenn es ein $b$ gibt, für welches usw. so ist $a$ kein I. II. Ding), ist aber gar keine Hauptbedingung nötig. Der Grund ist derselbe wie bei Axiom I. 4.: Es wird ja keine Existenz gefordert.

Bei den Axiomen V. 1.—3. schließlich brauchen wir auch keine Hauptbedingungen. Denn hier werden zwar Existenzen gefordert, aber Existenzen von I. II. Dingen. Daß nun $\text{II}_{\Sigma'}$ Dinge von den geforderten Eigenschaften existieren, folgt bereits aus den Axiomen der Gruppen I.—IV., d. h. für $\Sigma'$ aus den Bedingungen 1.—19, 24. Da aber diese $\text{II}_{\Sigma'}$ Dinge in $\Sigma$ sicherlich I. II. Dinge sind ($\Sigma$ erfüllt ja die Axiome der Gruppe V.), so müssen sie auch I. $\text{II.}_{\Sigma'}$ Dinge sein. (I. $\text{II.}_{\Sigma'}$ Dinge sind ja definiert, als zu $\Sigma'$ gehörende I. II. Dinge.)

Zusammenfassend können wir also sagen:

Dazu, daß $\Sigma'$ den Axiomen genüge, ist es jedenfalls hinreichend, daß die Bedingungen 1.—24. erfüllt seien. Jede der Bedingungen 1.—24. hat die folgende Form:

> Die I. oder II. Dinge $u_1, u_2 \ldots u_n$ sollen zu $\Sigma'$ gehören. Wenn sie der Bedingung $A(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ genügen und wenn es I. oder II. Dinge $v$ gibt, die der Bedingung $B(u_1, u_2, \ldots, u_n, v)$ genügen, so gehört auch ein solches $v$ zu $\Sigma'$.

In die Bedingungen $A$, $B$ gehen dabei (außer $u_1, u_2, \ldots, u_n$, bzw. $u_1, u_2, \ldots u_n, v$) bloß Eigenschaften von $\Sigma$ ein, $\Sigma'$ kommt in ihnen nicht vor. Für gewisse Bedingungen 1, 3, 5—7, 10—11) ist dabei $n = 0$ zu setzen, d. h. es wird verlangt: Wenn ein $v$ mit der Eigenschaft $B(v)$ existiert, so gehöre ein solches $v$ zu $\Sigma'$

Solchen Bedingungen kann man aber leicht genügen. Es gibt offenbar ein kleinstes $\Sigma'$, das diesen Bedingungen genügt (welche aber weitergehend sind, als die ursprüngliche Forderung, daß $\Sigma'$ den Axiomen genüge). Man hat nur das folgende Verfahren anzuwenden:

> Man nehme alle Bedingungen 1.—24., in denen $n = 0$ ist (siehe oben), und bilde die durch dieselbe postulierten I. oder II. Dinge $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$. — Sodann nehme man alle Bedingungen 1.—24., in denen $n \geqq 1$ ist (d. h. die wirklich variable $u_1, u_2, \ldots, u_n$ enthalten). Man setze sie in alle möglichen Kombinationen von $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ ein, und bilde die dann postulierten I. oder II. Dinge $v_1', v_2', \ldots, v_{\mu'}'$. Man setze in sie dann alle möglichen Kombinationen von $v_1, v_2, \ldots v_\mu; v_1', v_2' \ldots, v_{\mu'}'$ ein, und bilde dann die postulierten I. und II. Dinge $v_1'' v_2'', \ldots, v_{\mu''}''$. — usw., usw.

Wenn wir nun $\Sigma'$ als das System der Dinge $v_1, v_2, \ldots, v_\mu; v_1', v_2', \ldots, v_{\mu'}'; v_1'', v_2'', \ldots v_{\mu''}''; \ldots$ wählen, so haben wir ein System, das unseren Axiomen genügt.

## § 3. Die Abzählbarkeit.

Das $\Sigma'$, das wir im § 21 gewonnen haben, hat eine höchst überraschende Eigenschaft: Es ist offenbar abzählbar. Dabei ist auf den Sinn des Wortes „abzählbar“ zu achten. $\Sigma'$ ist nicht abzählbar in dem Sinne, daß es als Bereich im Systeme $\Sigma$ (oder $\Sigma'$) die Mächtigkeit $\aleph_0$ hat, d. h. auf die erste unendliche Ordnungszahl $\omega$ durch ein II. Ding aus $\Sigma$ ein-eindeutig abgebildet werden kann [1]).

[1]) Dies ist in der Tat gleichbedeutend mit „abzählbar“, weil nach unserer Definition der Ordnungszahl $\omega$ eine abzählbare Menge darstellt. (Vgl. das Zitat von Fußnote [1]) S. 223.)

Davon kann natürlich keine Rede sein, denn $\Sigma'$ ist ja überhaupt kein Bereich, es enthält auch II. Dinge (siehe Kapitel 1). Außerdem sind Teile von ihm (nämlich alle unabzählbaren Teilbereiche von $\Sigma'$) „unabzählbar" in dem Sinne, den dieser Begriff im System $\Sigma'$ hat. Aber es ist „abzählbar", wenn wir es als Bereich in dem „höheren" Systeme $P$ betrachten (und die vorhin erwähnten Teilbereiche alle mit ihm), oder mit den Worten der naiven Mengenlehre: Seine Elemente können *de facto* in eine Reihe geschrieben werden.

Es ist wesentlich, hier alle Mißverständnisse auszuschalten. Im System $\Sigma'$ liegen eine Reihe von Mengen und von Abbildungen vor. Diese genügen den formalen Anforderungen der Mengenlehre. Die Mengen haben alle möglichen Mächtigkeiten. Aber alle diese Mächtigkeiten sind scheinbar, sind nur Mächtigkeiten relativ zur Gruppe der Abbildungen des Systems. Denn das System $\Sigma'$ umfaßt (trotz seiner formalen Vollständigkeit) noch lange nicht alle denkbaren Abbildungen: Ein „höheres" System $P$ muß bereits neue Abbildungen enthalten, so z. B. solche, die alle (unendlichen) Mengen in $\Sigma'$ auf einander abbilden. Denn als Teile des (in $P$) abzählbaren $\Sigma'$ sind ja alle abzählbar, also (in $P$) gleichmächtig. Man könnte vielleicht glauben, es bestände hier ein Widerspruch zum Axiom IV. 2.: Kann doch das II. Ding $\omega$ (oder irgendein unendliches I. II. Ding) auf den Bereich aller I. Dinge abgebildet werden, und es ist trotzdem ein I. II. Ding! Aber es ist was die Antwort sein muß: Die fragliche Abbildung gehört zu $P$ (ist $\text{II}_P$ Ding) und nicht zu $\Sigma'$, und nur auf II. Dinge aus $\Sigma'$ bezog sich naturgemäß das Axiom IV.2.

Diese Relativität der Mächtigkeiten ist ein sehr krasses Zeugnis dafür, wie weit die abstrakt-formalistische Mengenlehre von allem, was anschaulich ist, liegt. Man kann wohl Systeme $\Sigma'$ herstellen, die durch Erfüllen gewisser formaler Axiome die Mengenlehre bis in alle Details treu repräsentieren, die also eigentlich die formale Mengenlehre selbst sind. Es treten in ihnen alle bekannten Mächtigkeiten auf in ihrer unendlich großen Anzahl, die größer als jede Mächtigkeit ist. Aber sobald man feinere Untersuchungsinstrumente ansetzt („höhere" Systeme $P$) löst sich das alles in nichts auf. Von allen Mächtigkeiten bleibt nichts als die endlichen und die abzählbare übrig. Nur diese haben realen Sinn, alles andere ist formalistische Fiktion.

Dieser Umstand ist übrigens keineswegs etwa eine spezielle Eigenschaft unserer Axiomatik: Das im § 2 angewandte Verfahren könnte man fast genau so anwenden (vgl. die Arbeiten von *Löwenheim* und *Skolem*), wenn an Stelle unserer Axiome irgendwelche andere logische Bedingungen gesetzt würden. Die soeben ausgeführte Konstruktion drückt jeder axiomatischen Mengenlehre den Stempel der Irrealität (oder mit einem viel benützten Worte „Imprädikativität") auf.

## § 4. Mengenlehrenmodelle.

Wir wissen jetzt: wenn es überhaupt möglich ist ein System $\Sigma$ zu finden, welches den Axiomen genügt, so kann man auch ein solches System finden, in dem es nur abzählbar viele I. Dinge und abzählbar viele II. Dinge gibt. Dies läßt es aber als möglich erscheinen, daß man rein arithmetisch ein Modell für die Mengenlehre findet. Man könnte etwa den folgenden Ansatz machen:

Die I. Dinge seien die ganzen Zahlen 1, 2, . . ..

Die II. Dinge seien alle Funktionen $f$ aus einer Menge $\Phi$ von Funktionen ($\Phi$ ist selbstverständlich ebenfalls abzählbar), deren Definitionsbereich und Wertevorrat die ganzen Zahlen sind.

$(x, y)$ sei eine gegebene Funktion $p\,(xy)$, definiert für $x, y = 1, 2, \ldots$.

$[xy]$ sei $f\,(y)$ wenn $x$ die Funktion $f$ aus $\Phi$ und $y = 1, 2, \ldots$ ist.

$A$ sei 1, $B$ sei 2.

Es ist aber noch eine Korrektion bezüglich der I. II. Dinge anzubringen; denn so wie der Ansatz zunächst lautet, sind die I. Dinge von den II. Dingen alle verschieden. Dem ist aber leicht abzuhelfen. Wir nehmen an, daß alle I. Dinge auch I. II. Dinge sind. Dieser Erweiterung des Axioms IV. 1. ist unwesentlich; man kann zeigen: sind die Axiome widerspruchfrei, so sind sie es auch mit dieser Erweiterung. Dann müssen wir einfach zu jedem I. Dinge, d. h. zu jeder Zahl 1, 2,. . . angeben, mit welchem II. Ding, d. h. mit welcher Funktion aus $\Phi$ es zu identifizieren ist. Zu diesem Zwecke brauchen wir eine weitere 2-Variablen-Funktion $\varphi(xy)$; dann werden wir der Zahl $x$ die Funktionen $\varphi(xy)$ (als Funktion von $y$ betrachtet) zuordnen, die also zu $\Phi$ gehören muß. Also:

Die Funktion $\varphi\,(xy)$ sei definiert für $x, y = 1, 2, \ldots$.

Für festes $x$ ist $\varphi\,(xy)$ Funktion von $y$, als solche gehöre es für jedes $x$ zu $\Phi$.

Es fragt sich noch, welchen Bedingungen die beiden Funktionen $p$, $\varphi$ und die Menge von Funktionen $\Phi$ (nur sie sind noch im Ansatze willkürlich) zu genügen haben, damit die Axiome erfüllt seien.

Man kann zunächst zeigen, daß man für $p(xy) = (xy)$ z. B. $2^{x-1}\,(2y-1)$ wählen darf (aus $p\,(x_1\,y_1) = p\,(x_2\,y_2)$ folgt $x_1 = x_2, y_1 = y_2$), denn diese Funktion spielt keine besonders tiefliegende Rolle. Wesentlich aber ist die Wahl von $\varphi\,(x\,y)$ und von $\Phi$.

Nun kann man die Bedingungen für diese beiden formulieren. Wir wollen das hier nicht mehr im einzelnen durchführen, sondern nur einiges über ihre Form angeben.

Die Bedingungen werden (gegenüber denen im § 3) dadurch wesentlich verschärft und kompliziert, daß nun das System nicht mehr Teil eines größeren ist, welches die Axiome erfüllt (wie $\Sigma'$ von $\Sigma$). Sie werden infolgedessen auch nicht mehr den einfach erfüllbaren Charakter haben. Besonders bedenklich wird das Axiom IV. 2. Denn es fordert, daß keine Funktion, die eine Menge $\varphi\,(x\,y) \neq 1$ ($x$ fest, $y$ das Element) auf die Menge aller Zahlen abbildet, zu $\Phi$ gehören darf. Während nun die meisten Bedingungen dem $\Phi$ eine untere Grenze vorschreiben (d. h. verlangen, daß gewisse Funktionen zu $\Phi$ gehören müssen) schreibt ihm dieses Axiom eine obere Grenze vor. Man hat zunächst gar keine Garantie dafür, ob die beiden Grenzen nicht kollidiren, was neue Antinomien bedeuten würde. Das ist indessen kein so schwerwiegendes Argument gegen die Wahl des Axioms IV. 2., als man zunächst denken möchte. Denn an Stelle von IV. 2. müßte man ja doch zu allermindest das *Zermelo*sche Aussonderungs-Axiom annehmen (und das wäre noch für viele Zwecke gar nicht hinreichend) etwa in folgender Form:

IV. 2. Wenn $b$ ein I. II. Ding und $a$ ein II. Ding ist, und wenn $a \lesssim b$ ist, so ist auch $a$ ein I. II. Ding.

Dieses Axiom entspricht dem Aussonderungsaxiom. Denn daß $a$ ein II. Ding ist, bedeutet dasselbe, was *Zermelo* als „durch eine definite Eigenschaft bestimmt" bezeichnet. Zusammen mit $a \lesssim b$, wo $b$ ein I. II.-Ding ist, muß hieraus die Zulässigkeit von $a$ folgen, d. h. daß $a$ ein I. II. Ding ist.

Und dieses (absolut unvermeidliche) Axiom würde, wie man sich leicht überzeugt, genau dieselben Schwierigkeiten machen wie IV. 2. An der Stelle von IV. 2. muß eben unbedingt ein spezifiisch „imprädikatives" Axiom stehen; und ein derartiges Axiom muß bei der Konstruktion eines Modelles Schwierigkeiten machen.

Die Bedingungen, die in dieser Art gewonnen werden, sind so unübersichtlich und kompliziert, daß wir kein Modell angeben können, ja gar nicht feststellen können, ob sie überhaupt verträglich sind obgleich die Konstruktion durchführbar sein muß, falls die Mengenlehre auf nicht-intuitionistischer Basis überhaupt möglich ist.

Schließlich möchte ich noch eines bemerken. Wenn man die Axiome der Gruppe V. (Unendlichkeit) fortläßt, so reichen die übrig bleibenden Axiome zur Begründung der Theorie der endlichen Zahlen aus; ja selbst die Theorie der reellen Zahlen wird im reduziertem Umfange möglich: Sie sind unendliche Bereiche, also keine Mengen (I. II. Dinge). Man erhält eine Mathematik, in der die Theorie der reellen Zahlen auf Grund der Fundamentalfolgen möglich ist, die Konvergenzsätze für Folgen und Reihen gelten, die Theorie der stetigen Funktionen, die Algebra, Analysis, und das *Riemann*sche Integral möglich sind. Sinnlos hingegen wird der *Weierstraß*sche Satz von der oberen Grenze (für Zahlenmengen, nicht Folgen), da Mengen aus II. Dingen unmöglich sind, ferner der allgemeine Funktionsbegriff die Wohlordnung des Kontinuums, das *Lebesgue*sche Integral.

Da man es hierbei nur mit endlichen Mengen zu tun hat (alle I. II. Dinge sind ja endlich), so kann man hierfür ein Modell angeben. $\Phi(x\,y)$ muß so gewählt werden, daß man alle Funktionen, die nur für endlich viele Zahlen $\neq 1$ sind, darstellen kann, z. B.:

Die Primzahlen seien der Größe nach geordnet:

$$p_1, p_2, \ldots.$$

Wenn $x = \prod_{n=0}^{\infty} p_n^{a_n}$ ist (alle $a_n \geqq 0$, nur endlich viele $> 0$), so ist:

$$f(x\,y) = a_y + 1.$$

Die Wahl des $\Phi$ ist dann leicht, man hat nur konstruktive Bedingungen (in diesem Falle ist nämlich IV. 2. automatisch erfüllt, die Kollision der beiden, obenerwähnten Grenzen für $\Phi$ findet nicht statt), wie man ziemlich leicht einsehen kann.

Man erhält so, als weiteren Beleg dafür, was im § 3 von der Abzählbarkeit gesagt wurde, ein abzählbares Modell für eine Pseudo-Mathematik, die mit der „wirklichen" in einem großen Teile der wesentlichen Punkte übereinstimmt. Für die „große" Mengenlehre ist zwar das Modell unbekannt, aber es muß auch hier existieren, falls eine formalistische Mengenlehre überhaupt möglich ist.

## § 5. Kategorizität.

Wir müssen nun noch untersuchen, ob unser Axiomensystem kategorisch ist, d. h. ob es das von ihm beschriebene System eindeutig bestimmt [1]). Wir wollen diesen Begriff näher beschreiben.

Es ist bekannt, daß aus den euklidischen Axiomen ohne das fünfte Postulat noch nichts über dieses fünfte Postulat folgt. D. h.: Es kann zwei Systeme geben, die beide diesen Axiomen genügen, von denen aber das erste dem genannten Postulate genügt, das zweite nicht. Im Gegensatze hierzu kann in der regelrecht axiomatisierten Geometrie so etwas niemals geschehen; ein geometrischer Satz, der in einem den geometrischen Axiomen genügenden Systeme wahr ist, ist es auch in jedem anderen. (Daß die Axiome der Geometrie letzten Endes von denen der Mengenlehre abhängen — wegen der „Stetigkeit" —, davon wollen wir zunächst absehen.) Daß dies so ist, beruht auf dem folgenden Satze:

(Isomorphismus)

$A_1$, $A_2$ seien zwei Systeme, die den geometrischen Axiomen genügen. Es gibt dann eine ein-eindeutige Abbildung von $A_1$ auf $A_2$, bei der die den Axiomen zugrunde liegenden Beziehungen erhalten bleiben, d. h.: bei der ineinander liegende Punkte und Geraden, streckengleiche Strecken, kongruente Dreiecke usw. in ebensolche übergehen (d. i. der „Isomorphismus").

Aus diesem leicht zu beweisendem Satze folgt offenbar: ist ein mit Hilfe dieser Grundbeziehungen formulierter Satz in $A_1$ erfüllt, so ist er es auch in $A_2$.

Ein Axiomensystem von dieser letzteren Art, in dem ein dem angegebenen Satze analoger Isomorphismus-Satz gilt, bestimmt also die logischen Eigenschaften der von ihm beschriebener Systeme ganz eindeutig, es heißt *kategorisch*. Ist nun das System unserer Axiome derart?

Dies ist höchst wichtig. Denn wir wissen ja bloß, daß die bereits erledigten Sätze der Mengenlehre aus ihm folgen. Die unerledigten aber, z. B. das Kontinuum-Problem, könnten (wenn die Kategorizität fehlt) in einem ihnen genügenden Systeme richtig, im anderen falsch sein. D. h. es wäre überhaupt unsicher, ob diese Axiome zur Erledigung z. B. des Kontinuum-Problems hinreichen.

Daß die Axiome in der jetzigen Form viel zu weit sind, um kategorisch zu sein, ist klar; wir wissen ja z. B. nicht, ob es I. Dinge gibt, die keine I. II. Dinge sind; ob $A$ und $B$ Mengen sind; ob $(A\ B) = A$ oder $\neq A$ ist; usw. Dem ist aber leicht abzuhelfen. Wir verlangen (man kann zeigen, daß diese Axiome keine Widersprüche erzeugen, falls die früheren widerspruchsfrei waren):

VI. 1. Alle I. Dinge sind I. II. Dinge. (IV. 1. wird hierdurch überflüssig.)
2. Es ist $A = O$, $B = (O)$. ($O$ ist die Menge ohne Elemente, $(O)$ enthält nur $O$.)
3. Es ist $(u, v) = ((u, v), (u))$. $((\alpha,\beta)$ ist die Menge mit den Elementen $\alpha, \beta$. Aus $((u_1, v_1), (u_1)) = ((u_2, v_2), (u_2))$ folgt, wie man leicht zeigt $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.)

---

[1]) Der Begriff der „Kategorizität" stammt von *O. Veblen* (Transactions of the American math. Society 5, 1914, S. 346).

Ein weiteres Hindernis, auf welches bereits im Kapitel 1. hingewiesen wurde, die Möglichkeit der Existenz „unerreichbarer" Mengen, wie z. B. die „absteigenden Mengenfolgen" (siehe § 1.) können wir auch ausschalten. Wir haben im § 1 die Motive auseinandergesetzt, die es unmöglich machen dies direkt durch ein „Beschränktheitsaxiom" zu erreichen. Es genügt aber formal auch das Ausschließen der „absteigenden Mengenfolgen" (auf den Beweis gehen wir hier hier nicht ein). Also:

4. Es gibt kein II. Ding $a$ mit der folgenden Eigenschaft:

Es ist für jede endliche Ordnungszahl (d. h. ganze Zahl) $n$

$$[a,\ n+1]\ \varepsilon\ [a, n].$$

(Auch hier kann gezeigt werden, daß dieses Axiom VI. 4. keine neuen Widersprüche erzeugen kann. — Eigentlich wäre noch eine weitere Quelle der Nicht-Kategorizität auszuschalten, nämlich die vielleicht mögliche Existenz von sog. regulären Anfangszahlen mit Limes-Index. Dies führt aber zu sehr ins Gebiet der speziellen Mengenlehre, um hier behandelt zu werden; obendrein kann auch diese Schwierigkeit beseitigt werden.)

Nun ist aber unser Axiomensystem auch nach der Hinzunahme dieser Axiomengruppe VI. in Wirklichkeit höchstwahrscheinlich immer noch nicht kategorisch; die Konstruktion der erforderlichen isomorphen Abbildung zweier den Axiomen genügenden Systeme $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ auf einander gelingt trotz alledem nicht. Sie scheitert im wesentlichen an dem Umstande, daß das Axiom VI. 4. nicht alle „absteigenden Mengenfolgen" ausschließt, sondern nur die, die die Normalform der Folgen im System $\Sigma_1$ (bzw. $\Sigma_2$) $[a\,1]$, $[a\,2]$, $[a\,3]$, ... ($a$ ein II. Ding in $\Sigma_1$ bzw. $\Sigma_2$) haben. Dann können aber natürlich noch immer welche „außerhalb des Systems" übrigbleiben. Im Interesse der isomorphen Abbildung müßte man auch diese verbieten, d. h. wieder zu einem Systeme $P$, das „höher" als beide Systeme $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ ist, greifen. Und das ist bei dem Axiome VI. 4., das sich auf $\Sigma_1$ bzw. $\Sigma_2$ *allein* zu beziehen hat, unmöglich.

Nach alledem scheint also überhaupt keine kategorische Axiomatisierung der Mengenlehre zu existieren; denn die Schwierigkeit mit dem Beschränktheitsaxiom und den „höheren" Systemen wird wohl keine Axiomatik vermeiden können. Und da es kein Axiomensystem für Mathematik, Geometrie, usw. gibt, das nicht die Mengenlehre voraussetzte, so wird es wohl überhaupt keine kategorisch axiomatisierten unendlichen Systeme geben. Dieser Umstand scheint mir ein Argument für den Intuitionismus zu sein.

Im Anschluß an die Kategorizitätsfrage sei noch das folgende erwähnt. Es seien zwei Systeme $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ gegeben, $a_1$, $a_2$ seien Mengen in ihnen; und die Elemente von $a_1$ in $\Sigma_1$ seien genau dieselben wie die Elemente von $a_2$ in $\Sigma_2$. Wir wissen, daß es dann sehr wohl geschehen kann, daß $a_1$ in $\Sigma_1$ unabzählbar ist, aber $a_2$ in $\Sigma_2$ nicht (nämlich wenn $\Sigma_2$ „höher" als $\Sigma_1$ ist). Es ist aber vielleicht sogar auch mit der Endlichkeit so. Die Definition der Endlichkeit ist jedenfalls infolge des Auftretens des Begriffes „alle" und „es gibt" in bezug auf das ganze System ($\Sigma_1$ bzw. $\Sigma_2$) derartig, daß man nichts Bestimmtes sagen kann [1]). Ebenso steht es mit der Wohlord-

[1]) Die Endlichkeit kann z. B. folgendermaßen definiert werden:

nung. Man hat also die Relativität der Mächtigkeiten nicht nur nach oben (vom Abzählbaren) hin in Betracht zu ziehen, (siehe Kapitel 3), sondern auch nach unten hin (im Endlichen). Elementare Begriffe, wie Endlichkeit und Wohlordnung, hängen jedenfalls vom gewählten System ab ($\Sigma_1$ oder $\Sigma_2$) ab; und es ist nicht ausgeschlossen, daß dieses Abhängen von wesentlichem Charakter ist: daß eine Menge $a$ im Systeme $\Sigma_1$ wohlgeordnet (bzw. endlich) zu sein scheint und sich im „feineren" Systeme $\Sigma_2$ als nicht wohlgeordnet (bzw. unendlich) herausstellt, bloß weil ein Teil $b$ von ihm, der kein erstes Element hat, im Systeme $\Sigma_1$ keine Menge war, also dort nicht bemerkt wurde, es aber im Systeme $\Sigma_2$ ist. (Analog bei der Endlichkeit).

Ja letzten Endes wäre es denkbar, daß *ein jedes* System $\Sigma_1$ noch derart „verfeinert" werden kann, daß sich endliche (bzw. wohlgeordnete) Mengen als unendlich (bzw. nicht wohlgeordnet herausstellen. (Bei der Unabzählbarkeit ist ja das sicherlich der Fall.). Dann bliebe auch vom Begriffe der Endlichkeit (ebenso wie von dem der Unabzählbarkeit) nichts als die formale Einkleidung übrig. Es ist schwer zu sagen, gegen was das mehr sprechen würde; gegen den vom Intuitionismus verfochtenen anschaulichen Charakter der Endlichkeit oder gegen ihre durch die Mengenlehre gegebene Formalisierung.

Es ist eigentlich ein Einwand gegen beide: tritt doch hier eine neue Schwierigkeit auf, die von den durch *Russel* und *Brouwer* angedeuteten wesentlich verschieden ist. Das abzählbar Unendliche als solches ist unanfechtbar: es ist ja nichts weiter als der allgemeine Begriff der positiven ganzen Zahl, auf dem die Mathematik beruht und von dem selbst *Kronecker* und *Brouwer* zugeben, daß er von „Gott geschaffen" sei. Aber seine Grenzen scheinen sehr verschwommen und ohne anschaulich-inhaltliche Bedeutung zu sein. Nach oben hin, im „Unabzählbaren", ist dies nach *Löwenheims* und *Skolems* Untersuchungen ganz sicher; nach unten hin, im „endlichen", ist es zumindest sehr plausibel: fehlt doch die Kategorizität sowie jeder Anhaltspunkt für die Bestimmtheit der Definition des „Endlichen". Außerdem *sind hier auch die Hilbertschen Ansätze machtlos*: denn dieser Einwand betrifft nicht die Widerspruchsfreiheit, sondern die — Eindeutigkeit (Kategorizität) der Mengenlehre.

Wir können zunächst nicht mehr tun als feststellen, daß hier ein weiteres Bedenken gegen die Mengenlehre vorliegt und daß vorläufig kein Weg der Rehabilitation bekannt ist.

---

$a$ sei ein Bereich. $a$ heißt endlich, wenn es keinen Bereich $b$ gibt, der die folgenden Eigenschaften besitzt:
$b$ hat Elemente die $\lesssim a$ sind. Wenn $x$ ein Element $\lesssim a$ von $b$ ist, so hat $b$ auch Elemente, die $\lesssim a$ und dabei $< x$ sind.

# Eine neue Bestimmung aller Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene.

Von *B. Schilling* in Dresden.

## Einleitung.

Herr *G. Scheffers* [1]) hat auf synthetischem Wege alle Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene bestimmt. Er baut sie auf aus der Dilatation und einer Transformation $\mathfrak{Z}$ unter Zuhilfenahme von Punkttransformationen, die jeden Kreis wieder in einen Kreis überführen. Diese Betrachtungen hat Herr *W. Ludwig* [2]) auf die nichteuklidische Geometrie ausgedehnt und dabei bewiesen, daß man durch die Aufeinanderfolge je zweier einfacher Berührungstransformationen der Kreise zu einer Berührungstransformation der Kreise gelangt, die in zwei einfache zerfällt. Unter einfachen Berührungstransformationen der Kreise sind dabei verstanden die Dilatation, die Transformation $\mathfrak{Z}$ und solche Berührungstransformationen, die mittels Punkttransformationen, die jeden Kreis in einen Kreis überführen, auf eine von diesen beiden zurückgeführt werden können, so daß also mit diesen einfachen Berührungstransformationen sämtliche algebraische Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene bekannt sind.

Jede solche einfache Berührungstransformation der Kreise in der euklidischen Ebene ist nun analytisch darstellbar durch eine Gleichung

$$\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0 ,$$

die sowohl in $x, y$ als auch in $\xi, \eta$ quadratisch ist. Der Zweck der vorliegenden Untersuchung ist, aus der allgemeinsten quadratisch-quadratischen Gleichung von der Form $\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ die Berührungstransformationen der Kreise in der euklidischen Ebene auf analytischem Wege herzuleiten. Die hierbei auftretenden Mehrdeutigkeiten wollen wir bei unseren Betrachtungen in vollem Umfange bestehen lassen. Damit die Gleichung $\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene darstellt, ist zunächst notwendig, daß jedem Punkte der $xy$-Ebene ($\Sigma_1$) ein Kreis der $\xi\eta$-Ebene ($\Sigma_2$) und umgekehrt jedem Punkte von $\Sigma_2$ ein Kreis von $\Sigma_1$ zugeordnet ist. Natürlich stellt nicht jede solche Gleichung eine Berührungstransformation der Kreise dar, aber in der allgemeinsten

[1]) „Synthetische Bestimmung aller Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene.“ (Berichte über die Verhandlungen der Kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Leipzig, 1899, Bd. 51.)

[2]) „Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie.“ Habilitationsschrift. Karlsruhe i. B. 1904.

Gleichung dieser Art, — und diese kann man leicht aufstellen —, sind die Gleichungen aller Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene enthalten. Es tritt für die letzteren noch die zweite Bedingung hinzu, daß in beiderlei Sinne jedem Kreise der einen Ebene zwei Kreise der anderen entsprechen.

## 1. Berührungstransformationen, die jedem Punkt einen Kreis zuordnen.

Jede Berührungstransformation der Ebene, die nicht eine erweiterte Punkttransformation ist, läßt sich nach *S. Lie* darstellen durch eine Gleichung von der Form

$$\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0\,, \tag{1}$$

wobei die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \Omega_x & \Omega_y \\ \Omega_\xi & \Omega_{x\xi} & \Omega_{y\xi} \\ \Omega_\eta & \Omega_{x\eta} & \Omega_{y\eta} \end{vmatrix} \tag{2}$$

nicht infolge von $\Omega = 0$ identisch verschwindet. $x$ und $y$ sind die Koordinaten in der einen Ebene $\Sigma_1$, $\xi$ und $\eta$ die in der anderen Ebene $\Sigma_2$. Andererseits stellt jede Gleichung von der Form (1) eine Berührungstransformation der Ebene dar, wenn $\Delta$ nicht infolge von $\Omega = 0$ identisch verschwindet.

Wenn jedem Punkte von $\Sigma_2$ in der Ebene $\Sigma_1$ ein Kreis entsprechen soll, so muß die Gleichung der Berührungstransformation die Form haben

$$\Omega(x, y \mid \xi, \eta) \equiv (x^2 + y^2)\, f_1(\xi, \eta) + 2x\, f_2(\xi, \eta) + 2y\, f_3(\xi, \eta) + f_4(\xi, \eta) = 0\,,$$

wobei $f_1, f_2, f_3, f_4$ irgendwelche Funktionen von $\xi$ und $\eta$ sind. Ist umgekehrt jedem Punkte von $\Sigma_1$ ein Kreis der Ebene $\Sigma_2$ zugeordnet, so hat die Gleichung die Form

$$\Omega(x, y \mid \xi, \eta) \equiv (\xi^2 + \eta^2)\, g_1(x, y) + 2\xi\, g_2(x, y) + 2\eta\, g_3(x, y) + g_4(x, y) = 0\,;$$

dabei sind $g_1, g_2, g_3, g_4$ irgendwelche Funktionen von $x$ und $y$. Soll nun in beiderlei Sinne jedem Punkte ein Kreis zugeordnet sein, so lautet die Gleichung der Berührungstransformation

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2)\,[p_{11}(\xi^2 + \eta^2) + 2\,p_{12}\xi + 2\,p_{13}\eta + p_{14}] \\ &\quad + 2\,x\,[p_{21}(\xi^2 + \eta^2) + 2\,p_{22}\xi + 2\,p_{23}\eta + p_{24}] \\ &\quad + 2\,y\,[p_{31}(\xi^2 + \eta^2) + 2\,p_{32}\xi + 2\,p_{33}\eta + p_{34}] \\ &\quad + \quad [p_{41}(\xi^2 + \eta^2) + 2\,p_{42}\xi + 2\,p_{43}\eta + p_{44}] = 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Das ist die allgemeinste Gleichung einer solchen Berührungstransformation. Die 16 Größen $p_{ik}$ sind beliebige Konstanten. Wir führen zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$\varphi_i(\xi, \eta) = p_{i1}(\xi^2 + \eta^2) + 2\,p_{i2}\xi + 2\,p_{i3}\eta + p_{i4}\,, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$
$$\psi_i(x, y) = p_{1i}(x^2 + y^2) + 2\,p_{2i}x + 2\,p_{3i}y + p_{4i}\,. \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Dann kann man die Gleichung (3) in der Form schreiben:

$$(x^2 + y^2)\,\varphi_1(\xi, \eta) + 2x\,\varphi_2(\xi, \eta) + 2y\,\varphi_3(\xi, \eta) + \varphi_4(\xi, \eta) = 0\,, \tag{3a}$$

oder in der Form:

$$(\xi^2 + \eta^2)\,\psi_1(x, y) + 2\,\xi\,\psi_2(x, y) + 2\,\eta\,\psi_3(x, y) + \psi_4(x, y) = 0\,. \tag{3b}$$

Für die 16 Konstanten $p_{ik}$ besteht nur die eine Bedingung, daß die Determinante $\Delta$ nicht infolge von $\Omega = 0$ identisch verschwinden darf.

In der Gleichung (3) sind alle Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene enthalten. Um diese zu finden, muß man die zwischen den 16 Koeffizienten $p_{ik}$ bestehenden Bedingungen dafür ermitteln, daß jedem Kreise in $\Sigma_1$ zwei Kreise von $\Sigma_2$ und umgekehrt jedem Kreise in $\Sigma_2$ zwei Kreise von $\Sigma_1$ entsprechen. Zunächst bestimmen wir die Gleichung der Kurve, die einem beliebigen Kreise der Ebene $\Sigma_2$ durch die Gleichung (3) zugeordnet ist. Der Kreis in $\Sigma_2$ sei dargestellt durch die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + 2a\xi + 2b\eta + c = 0\,. \tag{4}$$

Wir betrachten sie zusammen mit der Gleichung der Berührungstransformation (3) in der Form (3 b)

$$(\xi^2 + \eta^2)\,\psi_1(x, y) + 2\xi\,\psi_2(x, y) + 2\eta\,\psi_3(x, y) + \psi_4(x, y) = 0\,. \tag{3b}$$

Die Gleichungen (4) und (3 b) werden nun nach $\xi$ differenziert, wobei $x$ und $y$ als konstant angesehen werden:

$$\xi + \eta\eta' + a + b\eta' = 0\,, \tag{5}$$

$$(\xi + \eta\eta')\,\psi_1 + \psi_2 + \eta'\,\psi_3 = 0\,. \tag{6}$$

Aus den vier Gleichungen werden die drei Parameter $\xi$, $\eta$, $\eta'$ eliminiert. Wir multiplizieren zu diesem Zwecke die Gleichung (4) mit $\psi_1$ und subtrahieren davon die Gleichung (3 b); wir erhalten

$$2\xi\,(a\,\psi_1 - \psi_2) + 2\,\eta\,(b\,\psi_1 - \psi_3) + (c\,\psi_1 - \psi_4) = 0\,. \tag{7}$$

Weiter folgt aus den Gleichungen (5) und (6)

$$\eta' = -\frac{\xi + a}{\eta + b} = -\frac{\xi\,\psi_1 + \psi_2}{\eta\,\psi_1 + \psi_3}$$

oder

$$\xi\,(b\,\psi_1 - \psi_3) - \eta\,(a\,\psi_1 - \psi_2) - (a\,\psi_3 - b\,\psi_2) = 0\,. \tag{8}$$

Nun lösen wir die Gleichungen (7) und (8) nach $\xi$ und $\eta$ auf und setzen die gefundenen Werte in Gleichung (4) ein. Dann ergibt sich die Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l} 4a^2(\psi_3^2 - \psi_1\psi_4) + 4b^2(\psi_2^2 - \psi_1\psi_4) - c^2\psi_1^2 \\ -8ab\,\psi_2\psi_3 + 4ac\,\psi_1\psi_2 + 4bc\,\psi_1\psi_3 + 4a\,\psi_2\psi_4 \\ +4b\,\psi_3\psi_4 - 2c(2\psi_2^2 + 2\psi_3^2 - \psi_1\psi_4) - \psi_4^2 = 0. \end{array}\right. \tag{9}$$

Dabei ist

$$\psi_i = p_{1i}(x^2 + y^2) + 2p_{2i}x + 2p_{3i}y + p_{4i}\,. \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Durch die Gleichung (9) ist die Kurve in $\Sigma_1$ dargestellt, die dem durch die Gleichung (4) dargestellten Kreise von $\Sigma_2$ entspricht. Einem Kreise der Ebene $\Sigma_1$, dargestellt durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0\,, \tag{4'}$$

entspricht demnach in $\Sigma_2$ die durch die folgende Gleichung dargestellte Kurve:

$$\left\{\begin{array}{l} 4a_1^2(\varphi_3^2 - \varphi_1\varphi_4) + 4b_1^2(\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_4) - c_1^2\varphi_1^2 \\ -8a_1b_1\varphi_2\varphi_3 + 4a_1c_1\varphi_1\varphi_2 + 4b_1c_1\varphi_1\varphi_3 + 4a_1\varphi_2\varphi_4 \\ +4b_1\varphi_3\varphi_4 - 2c_1(2\varphi_2^2 + 2\varphi_3^2 - \varphi_1\varphi_4) - \varphi_4^2 = 0. \end{array}\right. \tag{9'}$$

Dabei ist

$$\varphi_i = p_{i1}(\xi^2 + \eta^2) + 2p_{i2}\xi + 2p_{i3}\eta + p_{i4}\,. \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Wir ordnen nun die Gleichung (9) nach Potenzen von $x$ und $y$; wie man sofort erkennt, erhält man eine Gleichung von der Form

$$R(x^2+y^2)^2 + (Ax + By)(x^2+y^2) + A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}x + 2A_{23}y + A_{33} = 0.$$

Dabei sind $R$, $A$, $B$, $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{12}$, $A_{13}$, $A_{23}$, $A_{33}$ Funktionen von $a$, $b$, $c$ und den 16 Konstanten $p_{ik}$. Ist $R \neq 0$, so ist dies die Gleichung einer bizirkularen Kurve. Man kann die 9 Koeffizienten dieser Gleichung leicht bestimmen. Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\pi_{ik} &= 4a^2(p_{i3}p_{k3} - p_{i1}p_{k4}) + 4b^2(p_{i2}p_{k2} - p_{i1}p_{k4} \\ &\quad - c^2 p_{i1}p_{k1} - 8ab\,p_{i2}p_{k3} + 4ac\,p_{i1}p_{k2} + 4bc\,p_{i1}p_{k3} \\ &\quad + 4a\,p_{i2}p_{k4} + 4b p_{i3}p_{k4} - 2c(2p_{i2}p_{k2} + 2p_{i3}p_{k3} - p_{i1}p_{k4}) - p_{i4}p_{k4}.\end{aligned} \tag{10 a}$$

Dann nimmt die Gleichung (9) die Gestalt an:

$$\begin{aligned}&\pi_{11}(x^2+y^2)^2 + [2(\pi_{12}+\pi_{21})x + 2(\pi_{13}+\pi_{31})y](x^2+y^2) \\ &\quad + (4\pi_{22} + \pi_{14} + \pi_{41})x^2 + (4\pi_{33} + \pi_{14} + \pi_{41})y^2 + 4(\pi_{23}+\pi_{32})xy \\ &\quad + 2(\pi_{24}+\pi_{42})x + 2(\pi_{34}+\pi_{43})y + \pi_{44} = 0.\end{aligned}$$

Wenn nun dem durch die Gleichung (4) dargestellten Kreise zwei Kreise entsprechen sollen, so muß diese Kurve 4. Ordnung in zwei Kreise zerfallen und zwar für alle Werte von $a$, $b$ und $c$. Dazu ist notwendig, daß $\pi_{11} \not\equiv 0$ ist, und da wir gerade die Berührungstransformationen der Kreise suchen, so können wir für die weiteren Betrachtungen $\pi_{11} \not\equiv 0$ voraussetzen. Wir können dann sagen: Von speziellen Fällen abgesehen, in denen sicher keine Berührungstransformationen der Kreise vorliegen, ist dem durch die Gleichung (4) dargestellten Kreise durch die Gleichung (3) die bizirkulare Kurve zugeordnet:

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)^2 + (\alpha x + \beta y)(x^2+y^2) \\ &\quad + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,;\end{aligned} \tag{10}$$

dabei ist

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha = \frac{2(\pi_{12}+\pi_{21})}{\pi_{11}}, \quad \beta = \frac{2(\pi_{13}+\pi_{31})}{\pi_{11}}, \quad a_{11} = \frac{4\pi_{22}+\pi_{14}+\pi_{41}}{\pi_{11}}, \\ &a_{22} = \frac{4\pi_{33}+\pi_{14}+\pi_{41}}{\pi_{11}}, \quad a_{12} = \frac{2(\pi_{23}+\pi_{32})}{\pi_{11}}, \quad a_{13} = \frac{\pi_{24}+\pi_{42}}{\pi_{11}}, \\ &a_{23} = \frac{\pi_{34}+\pi_{43}}{\pi_{11}}, \quad a_{33} = \frac{\pi_{44}}{\pi_{11}}. \end{aligned}\right. \tag{10 b}$$

Eine entsprechende bizirkulare Kurve in der Ebene $\Sigma_2$ ist im allgemeinen durch die Gleichung (9′) dargestellt; man erhält die Gleichung nach $\xi$ und $\eta$ geordnet, wenn man in Gleichung (10) überall $x$ und $y$ durch $\xi$ und $\eta$ und $p_{ik}$ durch $p_{ki}$ ersetzt.

Wir gelangen also zu folgendem Ergebnis: Damit die Gleichung (3) eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß sowohl die Gleichung (9) als auch die Gleichung (9′) je eine in zwei Kreise zerfallende Kurve 4. Ordnung darstellt.

## 2. Das Zerfallen einer bizirkularen Kurve in zwei Kreise.

Die Aufgabe, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu finden, daß die Gleichung (3) eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene darstellt, ist zurückgeführt auf eine andere Aufgabe: Es sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu ermitteln, daß die durch die Gleichung

$$(10)\qquad (x^2+y^2)^2+(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)+a_{11}x^2+a_{22}y^2 + 2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

dargestellte bizirkulare Kurve in zwei Kreise zerfällt. Die Gleichung jeder bizirkularen Kurve läßt sich in der Form (10) schreiben; sie stellt also die allgemeinste bizirkulare Kurve dar. Wenn sie in zwei Kreise zerfällt, so muß sie sich außerdem darstellen lassen durch eine Gleichung von der Form

$$(11)\qquad (x^2+y^2+2p_1x+2q_1y+r_1)(x^2+y^2+2p_2x+2q_2y+r_2)=0.$$

Die Gleichung (10) hat 8, die Gleichung (11) hat 6 wesentliche, voneinander unabhängige Koeffizienten; oder anders ausgedrückt: Es gibt in der Ebene $\infty^8$ bizirkulare Kurven, davon zerfallen $\infty^6$ in zwei Kreise. Zwischen den 8 Koeffizienten der Gleichung (10) werden also zwei voneinander unabhängige Relationen bestehen müssen, wenn die bizirkulare Kurve in zwei Kreise zerfällt. Diese beiden Relationen gilt es nun zu ermitteln. Multipliziert man das Produkt auf der linken Seite der Gleichung (11) aus und vergleicht man die Koeffizienten mit den Koeffizienten der Gleichung (10), so gelangt man unter der Voraussetzung, daß letztere zerfällt, zu den folgenden 8 Beziehungen:

$$(12)\qquad \begin{cases} \alpha=2(p_1+p_2), & \beta=2(q_1+q_2), \\ a_{11}=4p_1p_2+r_1+r_2, & a_{22}=4q_1q_2+r_1+r_2, & a_{12}=2(p_1q_2+p_2q_1), \\ a_{13}=p_1r_2+p_2r_1, & a_{23}=q_1r_2+q_2r_1, & a_{33}=r_1r_2. \end{cases}$$

Wir müssen nun die Koeffizienten der Gleichung (11) durch die Koeffizienten der Gleichung (10) ausdrücken. Zu diesem Zwecke bilden wir aus der dritten und vierten Gleichung durch Subtraktion die Gleichung

$$(13)\qquad 4(p_1p_2-q_1q_2)=a_{11}-a_{22}$$

und nehmen hierzu die Gleichungen

$$(14)\qquad 2(p_1q_2+p_2q_1)=a_{12},$$

$$(15)\qquad 2(p_1+p_2)=\alpha,$$

$$(16)\qquad 2(q_1+q_2)=\beta.$$

Diese vier Gleichungen lösen wir nach $p_1, p_2, q_1, q_2$ auf, was mit Hilfe von Quadratwurzeln möglich ist. Es gelingt nämlich, zwei Gleichungen aufzustellen, in denen die vier genannten Größen nur in den Verbindungen $p_1-p_2$ und $q_1-q_2$ auftreten. Aus diesen beiden Gleichungen kann man dann $p_1-p_2$ und $q_1-q_2$ berechnen und schließlich mit Hilfe von (15) und (16) die Größen $p_1, p_2, q_1, q_2$ selbst. Wir quadrieren zunächst die Gleichungen (15) und (16) und subtrahieren die letztere von der ersteren:

$$4(p_1^2+2p_1p_2+p_2^2)-4(q_1^2+2q_1q_2+q_2^2)=\alpha^2-\beta^2.$$

Davon subtrahieren wir die mit der Zahl 4 erweiterte Gleichung (13)

$$16p_1p_2 - 16q_1q_2 = 4(a_{11} - a_{22})$$

und erhalten

$$(17) \qquad 4(p_1 - p_2)^2 - 4(q_1 - q_2)^2 = (\alpha^2 - \beta^2) - 4(a_{11} - a_{22}).$$

Weiter multiplizieren wir die Gleichungen (15) und (16) miteinander:

$$4(p_1q_1 + p_2q_2 + p_1q_2 + p_2q_1) = \alpha\beta\,.$$

Davon subtrahieren wir die mit der Zahl 2 erweiterte Gleichung (14)

$$4(p_1q_2 + p_2q_1) = 2a_{12}$$

und erhalten

$$4(p_1q_1 + p_2q_2) = \alpha\beta - 2a_{12}.$$

Wir quadrieren diese Gleichung

$$16(p_1^2q_1^2 + 2p_1p_2q_1q_2 + p_2^2q_2^2) = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta a_{12} + 4a_{12}^2$$

sowie die mit der Zahl 2 erweiterte Gleichung (14)

$$16(p_1^2q_2^2 + 2p_1p_2q_1q_2 + p_2^2q_1^2) = 4a_{12}^2$$

und erhalten durch Substraktion der letzten Gleichung von der vorletzten

$$16(p_1^2q_1^2 - p_1^2q_2^2 - p_2^2q_1^2 + p_2^2q_2^2) = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta a_{12}$$

oder

$$16(p_1^2 - p_2^2)\,(q_1^2 - q_2^2) = \alpha\beta\,(\alpha\beta - 4a_{12})$$

oder

$$16(p_1 - p_2)\,(q_1 - q_2)\,(p_1 + p_2)\,(q_1 + q_2) = \alpha\beta\,(\alpha\beta - 4a_{12}).$$

Nun ist aber wegen (15) und (16)

$$4(p_1 + p_2)(q_1 + q_2) = \alpha\beta,$$

also folgt:

$$(18) \qquad 4(p_1 - p_2)(q_1 - q_2) = \alpha\beta - 4a_{12}.$$

Aus den Gleichungen (17) und (18) berechnen wir jetzt $p_1 - p_2$ und $q_1 - q_2$. Wir quadrieren die Gleichung (17)

$$16(p_1 - p_2)^4 - 32(p_1 - p_2)^2\,(q_1 - q_2)^2 + 16(q_1 - q_2)^4 = [(\alpha^2 - \beta^2) - 4(a_{11} - a_{22})^2]$$

und die mit der Zahl 2 erweiterte Gleichung (18) und erhalten:

$$64(p_1 - p_2)^2\,(q_1 - q_2)^2 = 4[\alpha\beta - 4a_{12}]^2.$$

Nun addieren wir die beiden letzten Gleichungen und ziehen auf beiden Seiten die Quadratwurzel:

$$4(p_1 - p_2)^2 + 4(q_1 - q_2)^2 = \sqrt{[(\alpha^2 - \beta^2) - 4(a_{11} - a_{22})]^2 + 4[\alpha\beta - 4a_{12}]^2}.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung (17) folgt:

$$\begin{aligned} 8(p_1 - p_2)^2 &= [(\alpha^2 - \beta^2) - 4(a_{11} - a_{22})] \\ &\quad + \sqrt{[(\alpha^2 - \beta^2) - 4(a_{11} - a_{22})]^2 + 4[\alpha\beta - 4a_{12}]^2}, \\ 8(q_1 - q_2)^2 &= -[(\alpha^2 - \beta^2) - 4(a_{11} - a_{22})] \\ &\quad + \sqrt{[(\alpha^2 - \beta^2) - 4(a_{11} - a_{22})]^2 + 4[\alpha\beta - 4a_{12}]^2}. \end{aligned}$$

Wir wollen die folgenden drei Abkürzungen einführen, von denen die dritte erst später Verwendung findet:

$$(19)\quad \begin{cases} A = (\alpha^2 - \beta^2) - 4(a_{11} - a_{22}), \qquad B = 2(\alpha\beta - 4a_{12}), \\ C = 4(a_{11} + a_{22}) - (\alpha^2 + \beta^2). \end{cases}$$

Dann können wir die letzten beiden Gleichungen kürzer so schreiben:

$$4(p_1 - p_2) = \sqrt{2A + 2\sqrt{A^2 + B^2}},$$
$$4(q_1 - q_2) = \sqrt{-2A + 2\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Nun ist nach (15) und (16)

$$4(p_1 + p_2) = 2\alpha \quad \text{und} \quad 4(q_1 + q_2) = 2\beta,$$

und wir erhalten schließlich:

$$(20)\quad \begin{cases} 8p_1 = 2\alpha + \sqrt{2A + 2\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ 8p_2 = 2\alpha - \sqrt{2A + 2\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ 8q_1 = 2\beta + \sqrt{-2A + 2\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ 8q_2 = 2\beta - \sqrt{-2A + 2\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{cases}$$

Nun sind noch die Größen $r_1$ und $r_2$ zu bestimmen, und wir betrachten zu diesem Zwecke von den Gleichungen (12) die dritte, die vierte und die achte:

$$4p_1p_2 + r_1 + r_2 = a_{11},$$
$$4q_1q_2 + r_1 + r_2 = a_{22},$$
$$r_1r_2 = a_{33}.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt

$$r_1 + r_2 = \frac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) - 4(p_1p_2 + q_1q_2)\right]$$

und unter Berücksichtigung der Gleichungen (20)

$$r_1 + r_2 = \frac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) - \frac{1}{16}(4(\alpha^2 + \beta^2) - 4\sqrt{A^2 + B^2})\right]$$

oder

$$r_1 + r_2 = \frac{1}{8}(C + \sqrt{A^2 + B^2}).$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung

$$r_1r_2 = a_{33}$$

folgt zunächst

$$r_1 - r_2 = \frac{1}{8}\sqrt{(C + \sqrt{A^2 + B^2})^2 - 2^8a_{33}}$$

und schließlich

$$(21)\quad \begin{cases} r_1 = \frac{1}{16}\left[C + \sqrt{A^2 + B^2} + \sqrt{(C + \sqrt{A^2 + B^2})^2 - 2^8a_{33}}\right], \\ r_2 = \frac{1}{16}\left[C + \sqrt{A^2 + B^2} - \sqrt{(C + \sqrt{A^2 + B^2})^2 - 2^8a_{33}}\right]. \end{cases}$$

Durch (20) und (21) sind die Koeffizienten der Gleichung (11) durch diejenigen der Gleichung (10) ausgedrückt. Dazu haben wir von den acht Gleichungen (12)

nur sechs gebraucht, und es ergeben sich daher aus den beiden nicht verwendeten, nämlich aus

$$a_{13} = p_1 r_2 + p_2 r_1,$$
$$a_{23} = q_1 r_2 + q_2 r_1$$

zwei Bedingungsgleichungen, die zwischen den acht Koeffizienten der Gleichung (10) bestehen, wenn die durch sie dargestellte bizirkulare Kurve in zwei Kreise zerfällt. Man setzt die durch (20) und (21) gegebenen Werte ein und erhält:

$$(22)\quad \begin{cases} 2^6 a_{13} = 2\alpha(C + \sqrt{A^2+B^2}) - \sqrt{2A + 2\sqrt{A^2+B^2}} \cdot \sqrt{(C+\sqrt{A^2+B^2})^2 - 2^8 a_{33}}, \\ 2^6 a_{23} = 2\beta(C + \sqrt{A^2+B^2}) - \sqrt{-2A + 2\sqrt{A^2+B^2}} \cdot \sqrt{(C+\sqrt{A^2+B^2})^2 - 2^8 a_{33}}. \end{cases}$$

Damit die durch die Gleichung (10) dargestellte bizirkulare Kurve in zwei Kreise zerfällt, ist notwendig und hinreichend, daß zwischen den acht Koeffizienten der Gleichung (10) die beiden Relationen (22) oder irgend zwei aus ihnen abgeleitete, voneinander unabhängige Relationen zu Recht bestehen. In jeder der beiden Gleichungen (22) kann man durch zweimaliges Quadrieren die Quadratwurzeln beseitigen.

Wir haben die Bedingungen für das Zerfallen einer bizirkularen Kurve in zwei Kreise aufgestellt, um aus der Gleichung (3) im ersten Abschnitt die allgemeinste Berührungstransformation der Kreise in der Ebene auszusondern. Diese Aufgabe ist jetzt formal gelöst. Wir setzen in den Gleichungen (22) für $\alpha, \beta, a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ die durch die Gleichungen (10 a) und (10 b) gegebenen Werte ein und erhalten zwei Gleichungen zwischen $a, b, c$ und den 16 Koeffizienten $p_{ik}$ der Gleichung (3), die für alle Werte von $a, b, c$ identisch erfüllt sein müssen, wenn die durch die Gleichung (9) dargestellte Kurve in zwei Kreise zerfallen soll. Zwei weitere Bedingungsgleichungen ergeben sich aus diesen beiden, wenn wir in ihnen überall $p_{ki}$ an die Stelle von $p_{ik}$ setzen; diese müssen erfüllt sein, damit auch die durch die Gleichung (9′) dargestellte Kurve in zwei Kreise zerfällt. Wir können sagen: Damit die durch die Gleichung (3) dargestellte Berührungstransformation eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene ist, ist notwendig und hinreichend, daß die vier Bedingungsgleichungen für das Zerfallen der durch die Gleichungen (9) und (9′) dargestellten Kurven für alle Werte von $a, b, c$ identisch erfüllt sind.

Wollte man diese vier Bedingungsgleichungen zwischen $a, b, c$ und den 16 Koeffizienten $p_{ik}$ wirklich aufstellen, so würde jede von ihnen nach Beseitigung der Quadratwurzeln in $a, b, c$ vom 24. Grade sein. Man würde nun nach Potenzen von $a, b, c$ ordnen und den Faktor von jedem $a^\varkappa b^\lambda c^\mu$ der Null gleichsetzen. Man erhielte dabei jedesmal eine Bedingungsgleichung zwischen den 16 Koeffizienten $p_{ik}$ der Gleichung (3). Die große Menge der dabei auftretenden Gleichungen und Summanden macht ein Weitergehen auf diesem Wege unmöglich.

### 3. Punkttransformationen, die Kreise in Kreise überführen.

Um zu einer Vereinfachung der Gleichung (3) unserer Berührungstransformation zu gelangen, betrachten wir die bekannten Punkttransformationen,

die jeden Kreis in einen Kreis überführen. Da haben wir zunächst die beiden Punkttransformationen, die jede Figur in eine zu ihr kongruente überführen: Die Verschiebung und die Drehung. Sind $m, n, \mu, \nu$ irgendwelche konstante Größen, so kann man sagen: Stellt die Gleichung $\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene dar, so ist dies auch der Fall für die Gleichung

$$\Omega(x + m, y + n \mid \xi + \mu, \eta + \nu) = 0 .$$

Einen entsprechenden Satz können wir auch für die Drehungen aussprechen. Es seien $\varphi$ und $\psi$ irgendwelche Winkel. Stellt die Gleichung $\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene dar, so stellt die Gleichung

$$\Omega(x \cos \varphi - y \sin \varphi,\ x \sin \varphi + y \cos \varphi \mid \xi \cos \psi - \eta \sin \psi, \xi \sin \psi + \eta \cos \psi) = 0$$

ebenfalls eine solche dar.

Eine weitere Punkttransformation, die wenigstens im wesentlichen jede Kurve unverändert läßt, ist die Spiegelung an einer Geraden. Sie führt jede Kurve in eine zu ihr symmetrische Kurve, also jeden Kreis in einen zu ihm kongruenten Kreis über. Wir betrachten insbesondere die Spiegelung an einer Koordinatenachse. In der Gleichung wird sich dann nur das Vorzeichen der anderen Koordinate ändern und wir können sagen: Stellt die Gleichung $\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene dar, so gilt dies auch für die Gleichungen

$$\Omega(\pm x, \pm y \mid \pm \xi, \pm \eta) = 0 ,$$

wobei die positiven und negativen Zeichen ganz beliebig, also auf 16 verschiedene Arten kombiniert werden können. Darunter befinden sich auch die Spiegelungen gleichzeitig an beiden Koordinatenachsen einer Ebene; diese sind identisch mit den Drehungen um den Winkel $\pi$. Wir betrachten auch die Spiegelung an der Geraden $y = x$ bzw. $\eta = \xi$; es vertauscht sich hierdurch in der Gleichung $x$ mit $y$ bzw. $\xi$ mit $\eta$. Stellt die Gleichung $\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene dar, so tut dies auch jede der drei Gleichungen

$$\Omega(y, x \mid \xi, \eta) = 0, \quad \Omega(x, y \mid \eta, \xi) = 0 , \quad \Omega(y, x \mid \eta, \xi) = 0 .$$

Wir betrachten noch zwei weitere Punkttransformationen, die jedem Kreis einen Kreis zuordnen, nämlich die Streckung vom Koordinatenanfang aus und die Transformation durch reziproke Radien. Die erstere läßt sich übrigens ersetzen durch Transformationen durch reziproke Radien. Aber es ist für die weiteren Untersuchungen zweckmäßiger, die allgemeine Streckung und eine ganz bestimmte Transformation durch reziproke Radien zu verwenden. Es seien $h$ und $k$ zwei von Null verschiedene, sonst aber beliebige Konstanten. Stellt dann die Gleichung $\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene dar, so ist dies auch der Fall bei der Gleichung

$$\Omega(hx, hy \mid k\xi, k\eta) = 0 .$$

Bei einer Transformation durch reziproke Radien ist zu bedenken, daß zwar im allgemeinen jeder Kreis wieder in einen Kreis übergeführt wird, daß aber eine gewisse Gruppe von Kreisen, nämlich die durch den Mittelpunkt des Bezugskreises

hindurchgehenden in gerade Linien verwandelt werden. Wir können aber uneingeschränkt den Satz aussprechen: Stellt die Gleichung $\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene dar, so tut dies auch jede der drei Gleichungen

$$\Omega\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{y}{x^2+y^2} \,\middle|\, \xi, \eta\right) = 0, \qquad \Omega\left(x, y \,\middle|\, \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right) = 0,$$

$$\Omega\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{y}{x^2+y^2} \,\middle|\, \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right) = 0.$$

Wir müßten nun, um die Überführung von Kreisen in gerade Linien auszuschließen, noch hinzufügen: Es dürfen in Gleichung (3) weder die vier Konstanten $p_{14}$, $p_{24}$, $p_{34}$, $p_{44}$ noch die vier Konstanten $p_{41}$, $p_{42}$, $p_{43}$, $p_{44}$ gleichzeitig der Null gleich sein. Wir werden aber sehen, daß diese Bedingungen von selbst erfüllt sind, wenn die Gleichung (3) überhanpt eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene darstellt.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man durch eine Vertauschung von $x$ und $y$ mit $\xi$ und $\eta$ eine Berührungstransformation der Kreise in eine ebensolche überführt, d. h. mit $\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ zugleich stellt auch die Gleichung $\Omega(\xi, \eta \mid x, y) = 0$ eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene dar.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal die Gleichung unserer Berührungstransformation in der Form (3):

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega(x, y \mid \xi, \eta) \equiv (x^2+y^2)\,&[p_{11}(\xi^2+\eta^2) + 2\,p_{12}\,\xi + 2\,p_{13}\eta + p_{14}] \\ + 2\,x\,&[p_{21}(\xi^2+\eta^2) + 2\,p_{22}\,\xi + 2\,p_{23}\eta + p_{24}] \\ + 2\,y\,&[p_{31}(\xi^2+\eta^2) + 2\,p_{32}\,\xi + 2\,p_{33}\eta + p_{34}] \\ +\quad &[p_{41}(\xi^2+\eta^2) + 2\,p_{42}\,\xi + 2\,p_{43}\eta + p_{44}] = 0. \end{aligned} \right.$$

Der besseren Übersicht halber wollen wir diese Gleichung durch eine schematische Darstellung ersetzen:

$$(3^*) \qquad \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{matrix}$$

Das Schema soll für jeden Koeffizienten die Stelle angeben, die er in der Gleichung (3) einnimmt; also z. B. das zweite Element der dritten Horizontalreihe ist immer der Faktor von $4\,y\,\xi$. Wir wollen jetzt voraussetzen, daß die Gleichung (3) eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene darstellt und wollen uns überlegen, welche Vertauschungen der Elemente in dem Schema (3*) zulässig sind, ohne daß diese Eigenschaft der Gleichung (3) zerstört wird. Durch eine Spiegelung der $xy$-Ebene an der Geraden $y = x$ vertauscht sich die zweite mit der dritten Horizontalreihe, durch eine Spiegelung der $\xi\eta$-Ebene an der Geraden $\eta = \xi$ vertauscht sich die zweite mit der dritten Vertikalreihe. Wendet man in der $xy$-Ebene die oben angegebene Transformation durch reziproke Radien an, so vertauscht sich die erste mit der vierten Horizontalreihe, während dieselbe Transformation in der $\xi\eta$-Ebene eine Vertauschung der ersten mit der vierten

Vertikalreihe bewirkt. Da man schließlich die Veränderlichen $x, y$ mit den Veränderlichen $\xi, \eta$ vertauschen kann, so kann man das Schema (3*) an der links oben beginnenden Diagonale spiegeln, und man erhält schließlich 32 verschiedene Berührungstransformationen, deren Gleichungen sich nur durch die Anordnung der 16 Koeffizienten $p_{ik}$ unterscheiden. Ist eine von ihnen eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene, so sind es die übrigen 31 auch. Wir wollen alle Vertauschungen von Elementen in dem Schema (3*), die jede Berührungstransformation der Kreise in eine ebensolche übergehen läßt, kurz als zulässige Vertauschungen bezeichnen.

Wir wollen noch zeigen, daß, wenn die Gleichung (3) eine Berührungstransformation der Kreise darstellt, es unmöglich ist, daß vier Elemente, die das Schema (3*) an einer der vier Seiten beranden, gleichzeitig der Null gleich sind. Im ersten Abschnitt ist durch die Gleichung (10), deren Koeffizienten durch (10 a) und (10 b) bestimmt sind, die bizirkulare Kurve gegeben, die einem beliebigen Kreise der Ebene $\Sigma_2$ durch die Gleichung (3) zugeordnet ist. Wenn diese in zwei Kreise zerfallen soll, so ist dazu sicher notwendig, daß das Glied $(x^2 + y^2)^2$ wirklich existiert, d. h. daß $\pi_{11} \not\equiv 0$ ist. Es seien nun in unserem Schema die Elemente der ersten Horizontalreihe sämtlich der Null gleich, also $p_{11} = p_{12} = p_{13} = p_{14} = 0$, so ist, wie man aus (10 a) sofort ersieht, $\pi_{11} \equiv 0$. Also kann in diesem Falle die Gleichung (3) keine Berührungstransformation der Kreise darstellen. Hat aber eine andere Randreihe des Schemas (3*) die Eigenschaft, daß ihre vier Elemente sämtlich gleich Null sind, und nehmen wir an, daß die Gleichung (3) eine Berührungstransformation der Kreise darstellt, so kann man diese Reihe stets durch zulässige Vertauschungen an die Stelle der ersten Horizontalreihe bringen, und nach dem vorhergehenden Schlusse kann die entsprechende Gleichung und somit auch die Gleichung (3) im Widerspruch zu der gemachten Annahme keine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene darstellen.

## 4. Die Dilatation und die Transformation $\mathfrak{Z}$.

Die beiden einfachsten Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene sind die Dilatation und die Transformation $\mathfrak{Z}$, wie sie von *G. Scheffers* bezeichnet worden ist. Sie lassen sich durch keine Punkttransformation ineinander überführen. Die Dilatation wird gewöhnlich dargestellt durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2x\xi - 2y\eta + \xi^2 + \eta^2 - r^2 = 0 \tag{23}$$

und die Transformation $\mathfrak{Z}$ durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x\xi - 2y\eta + \xi^2 + \eta^2 = 0\,. \tag{24}$$

Die geometrischen Eigenschaften dieser beiden Transformationen sind vielfach untersucht worden, sie sind jedoch für unsere Betrachtungen ohne Bedeutung. Das Schema (3*) nimmt für die Gleichung (23) der Dilatation die Form an

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -r^2 \end{array} \tag{23*}$$

und für die Transformation $\mathfrak{Z}$ (24) lautet das Schema

$$(24^*) \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Wir betrachten jetzt eine Berührungstransformation, die die Dilatation und die Transformation $\mathfrak{Z}$ als Unterfälle enthält. Sie sei gegeben durch das Schema

$$(25) \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & p_{14} \\ 0 & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 \\ p_{41} & 0 & 0 & p_{44} \end{matrix}$$

Es seien also in der Gleichung (3) außer $p_{14}$, $p_{22}$, $p_{33}$, $p_{41}$, $p_{44}$ die Koeffizienten $p_{ik}$ der Null gleich. Wie man sofort erkennt, sind in der Tat die Schemata (23*) und (24*) spezielle Fälle des Schemas (25). Wir wollen nun die Frage beantworten: Wie lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die durch das Schema (25) definierte Gleichung eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene darstellt?

Wir müssen zunächst die Koeffizienten der Gleichung (10) der bizirkularen Kurve ermitteln, die einem beliebigen Kreise der $\xi\eta$-Ebene entspricht. Aus der Gleichung (10 a) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= -p_{14}^2 & \pi_{21} &= 4a\,p_{14}p_{22} \\
\pi_{12} &= 0 & \pi_{22} &= 4(b^2-c)p_{22}^2 \\
\pi_{13} &= 0 & \pi_{23} &= -8\,a\,b\,p_{22}p_{33} \\
\pi_{14} &= -p_{14}p_{44} & \pi_{24} &= 4\,a\,p_{22}p_{44} \\
\pi_{31} &= 4\,b\,p_{14}p_{33} & \pi_{41} &= -4(a^2+b^2)\,p_{14}p_{41} + 2cp_{14}p_{41} - p_{14}p_{44} \\
\pi_{32} &= 0 & \pi_{42} &= 4\,a\,c\,p_{22}\,p_{41} \\
\pi_{33} &= 4(a^2-c)p_{33}^2 & \pi_{43} &= 4\,b\,c\,p_{33}\,p_{41} \\
\pi_{34} &= 4b\,p_{33}p_{44} & \pi_{44} &= -4(a^2+b^2)\,p_{41}p_{44} - c^2p_{41}^2 + 2cp_{41}p_{44} - p_{44}^2.
\end{aligned}$$

Nach den Gleichungen (10 b) folgt hieraus weiter:

$$a = \frac{-8ap_{22}}{p_{14}}, \qquad \beta = \frac{-8bp_{33}}{p_{14}}, \qquad a_{12} = \frac{16abp_{22}p_{33}}{p_{14}^2},$$

$$a_{11} = \frac{4a^2p_{14}p_{41} - 4b^2(4p_{22}^2 - p_{14}p_{41}) + 2c(8p_{22}^2 - p_{14}p_{41}) + 2p_{14}p_{44}}{p_{14}^2},$$

$$a_{22} = \frac{-4a^2(4p_{33}^2 - p_{14}p_{41}) + 4b^2p_{14}p_{41} + 2c(8p_{33}^2 - p_{14}p_{41}) + 2p_{14}p_{44}}{p_{14}^2},$$

$$a_{13} = \frac{-4acp_{22}p_{41} - 4ap_{22}p_{44}}{p_{14}^2}, \qquad a_{23} = \frac{-4bcp_{33}p_{41} - 4bp_{33}p_{44}}{p_{14}^2},$$

$$a_{33} = \frac{4a^2p_{41}p_{44} + 4b^2p_{41}p_{44} + c^2p_{41}^2 - 2cp_{41}p_{44} + p_{44}^2}{p_{14}^2}.$$

Daraus findet man:

$$A = (\alpha^2 - \beta^2) - 4(a_{11} - a_{22}) = \frac{64\,(a^2 + b^2 - c)\,(p_{22}^2 - p_{33}^2)}{p_{14}^2},$$

$$B = 2(\alpha\beta - 4\,a_{12}) = 0\,,$$

$$C = 4(a_{11} + a_{22}) - (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= \frac{-64(a^2 + b^2 - c)\,(p_{22}^2 + p_{33}^2) + 16(2\,a^2 + 2\,b^2 - c)\,p_{14}\,p_{41} + 16\,p_{14}\,p_{44}}{p_{14}^2},$$

$$\sqrt{2\,A + 2\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{16}{p_{14}}\sqrt{(a^2 + b^2 - c)\,(p_{22}^2 - p_{33}^2)},$$

$$\sqrt{-2A + 2\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Dabei ist von dem Ausdruck $\sqrt{A^2 + B^2}$ der positive Wert gewählt worden. Wir werden am Schluß dieses Abschnittes sehen, daß sich nichts wesentlich Neues ergibt, wenn man den negativen Wert wählt. Wir setzen diese Werte nun ein in die Gleichungen (22) und zwar zuerst in die zweite; wir erhalten:

$$-2^8\,\frac{bcp_{33}p_{41} + bp_{33}p_{44}}{p_{14}^2}$$

$$= -2^8\,\frac{bp_{33}}{p_{14}} \cdot \frac{-8(a^2 + b^2 - c)p_{33}^2 + (2\,a^2 + 2b^2 - c)p_{14}p_{41} + p_{14}p_{44}}{p_{14}^2}$$

oder

$$bcp_{14}p_{33}p_{41} + bp_{14}p_{33}p_{44} = 2\,b(a^2 + b^2)\,(p_{14}p_{33}p_{41} - 4\,p_{33}^3)$$
$$- bc\,(p_{14}p_{33}p_{41} - 8p_{33}^3) + bp_{14}p_{33}p_{44}\,.$$

Diese Gleichung muß für alle Werte von $a$, $b$, $c$ identisch erfüllt sein; es muß also der Faktor von $b(a^2 + b^2)$ der Null gleich sein, und die Faktoren von $bc$ auf der linken und rechten Seite müssen übereinstimmen. Man erhält dann beide Male dieselbe Gleichung

$$p_{33}(p_{14}p_{41} - 4\,p_{33}^2) = 0.$$

Damit ist eine notwendige Bedingung dafür gefunden, daß die fragliche Berührungstransformation eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene ist. Es muß also sein

$$\text{entweder} \quad p_{33} = 0 \quad \text{oder} \quad p_{14}p_{41} - 4p_{33}^2 = 0.$$

Ist $p_{33} = 0$, so kann man in dem Schema (25) durch zulässige Vertauschungen $p_{22}$ an die Stelle von $p_{33}$ bringen, ohne das Schema im übrigen zu verändern. Ist aber auch noch $p_{22} = 0$, so lautet die Gleichung der Berührungstransformation

$$p_{14}(x^2 + y^2) + p_{41}(\xi^2 + \eta^2) + p_{44} = 0.$$

Das ist aber keine Berührungstransformation, denn die durch Gleichung (2) dargestellte Determinante $\Delta$ verschwindet identisch. Es entsprechen dann in der Tat den $\infty^2$ Punkten der einen Ebene nur $\infty^1$ Kreise der anderen. Wir können also jetzt sagen: Die erste notwendige Bedingung dafür, daß wir eine Berührungstransformation der Kreise vor uns haben, lautet, wenn wir den Ausdruck $\sqrt{A^2 + B^2}$ positiv rechnen: Die Gleichung

$$(26) \qquad p_{14}p_{41} - p_{33}^2 = 0$$

muß erfüllt sein, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_{33} \neq 0$ voraussetzen dürfen.

Wir betrachten nun die erste der beiden Gleichungen (22) und setzen für $\alpha, \beta, a_{11}, \ldots a_{33}$ die oben angegebenen Werte ein. Es ergibt sich:

$$-2^8 \frac{a\,c\,p_{22}p_{41} + a\,p_{22}p_{44}}{p_{14}^2}$$

$$= -2^8 \frac{a\,p_{22}}{p_{14}} \cdot \frac{-8(a^2+b^2-c)\,p_{33}^2 + (2a^2+2b^2-c)\,p_{14}p_{41} + p_{14}p_{44}}{p_{14}^2}$$

$$-2^8 \frac{1}{p_{14}^3} \sqrt{(a^2+b^2-c)(p_{22}^2-p_{33}^2)}$$

$$\cdot \sqrt{[-8(a^2+b^2-c)\,p_{33}^2 + (2a^2+2b^2-c)\,p_{14}p_{41} + p_{14}p_{44}]^2 - p_{14}^2[4a^2p_{41}p_{44} + 4b^2p_{41}p_{44} + c^2p_{41}^2 - 2c\,p_{41}p_{44} + p_{44}^2]}.$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung (26) vereinfacht sich diese Gleichung bedeutend:

$$0 = \sqrt{(a^2+b^2-c)(p_{22}^2-p_{33}^2)} \cdot \sqrt{p_{14}^2 \cdot 4\,p_{14}p_{44}(a^2+b^2-c)}$$

oder

$$2(a^2+b^2-c)\,p_{14}\sqrt{(p_{22}^2-p_{33}^2)\,p_{14}p_{44}} = 0.$$

Das gibt drei Möglichkeiten:

1. $p_{14} = 0$, 2. $p_{22}^2 - p_{33}^2 = 0$, 3. $p_{44} = 0$.

Ist $p_{14} = 0$, so sind die vier Elemente der ersten Horizontalreihe des Schemas (25) sämtlich gleich Null, und wir haben festgestellt, daß dann keine Berührungstransformation der Kreise vorliegt. Auch würde wegen der Gleichung (26) dann $p_{33} = 0$ sein müssen, wir können aber stets $p_{33} \neq 0$ voraussetzen. Es ist also sicher $p_{14} \neq 0$ und wegen (26) dann auch $p_{41} \neq 0$. Es bleiben also nur noch zwei Fälle übrig:

$$\text{1. Fall} \quad \left\{ \begin{array}{r} p_{14}p_{41} - p_{33}^2 = 0 \\ p_{22}^2 - p_{33}^2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{2. Fall} \quad \left\{ \begin{array}{r} p_{14}p_{41} - p_{33}^2 = 0 \\ p_{44} = 0 \end{array} \right\}$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_{14} = p_{41} = 1$ setzen. Es ist $p_{14} \neq 0$ und $p_{41} \neq 0$; und da $p_{14}p_{41} = p_{33}^2$ ist, so haben $p_{14}$ und $p_{41}$ dasselbe Vorzeichen, wir können annehmen, das positive, was sich eventuell durch Multiplikation der ganzen Gleichung mit $-1$ erreichen läßt. Dann nehmen wir eine Streckung in beiden Ebenen vor, indem wir $x$ und $y$ mit $p_{14}^{-\frac{1}{2}}$ und $\xi$ und $\eta$ mit $p_{41}^{-\frac{1}{2}}$ multiplizieren. Dann haben die Faktoren von $x^2+y^2$ und $\xi^2+\eta^2$ den Wert 1. Weiter können wir über die Vorzeichen von $p_{22}$ und $p_{33}$ unabhängig voneinander ganz willkürlich verfügen, indem wir uns erinnern, daß in jeder Ebene eine Spiegelung an jeder Koordinatenachse zulässig ist. Es sollen $p_{22}$ und $p_{33}$ beide negativ werden. Dann folgt nach Gleichung (26), wenn $p_{14} = p_{41} = 1$ ist,

$$p_{33} = -\frac{1}{2}.$$

Ist $p_{22}^2 = p_{33}^2$ und gleichzeitig $p_{44} = 0$, so hat man die Gleichung

$$\Omega \equiv x^2 + y^2 - 2\,x\,\xi - 2\,y\,\eta + \xi^2 + \eta^2 = 0\,.$$

Diese Gleichung stellt überhaupt keine Berührungstransformation dar, die nach Gleichung (2) gebildete Determinante $\Delta$ verschwindet infolge $\Omega = 0$ identisch. Wir können also für den ersten Fall die Bedingungen so schreiben:

$$p_{14} = p_{41} = 1, \qquad p_{22} = p_{33} = -\frac{1}{2}, \qquad p_{44} \neq 0.$$

Ein Vergleich mit dem Schema (23*) zeigt, daß dies die Dilatation ist. Für den zweiten Fall können wir die Bedingungen zurückführen auf:

$$p_{14} = p_{41} = 1, \quad p_{33} = -\frac{1}{2}, \qquad p_{44} = 0, \quad p_{22} \neq p_{33}.$$

Ein Vergleich mit dem Schema (24*) zeigt, daß wir die Transformation $\mathfrak{Z}$ vor uns haben. Die beiden Fälle schließen aber einander aus.

Wir hatten oben den positiven Wert des Ausdruckes $\sqrt{A^2 + B^2}$ gewählt. Nimmt man den negativen Wert, so untersucht man zuerst die erste der beiden Gleichungen (22) und hierauf die zweite. Es ändert sich dann in den Resultaten nichts, außer daß $p_{33}$ mit $p_{22}$ vertauscht wird. Das ist aber schon an sich möglich durch zulässige Vertauschungen in dem Schema (25), und dieser Fall läßt sich somit auf den soeben untersuchten sofort zurückführen.

Wir wollen eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene, die man mittels Punkttransformationen, die jeden Kreis in einen Kreis überführen, in die durch (23) bzw. (24) dargestellte Gleichung überführen kann, eine erweiterte Dilatation bezw. eine erweiterte Transformation $\mathfrak{Z}$ nennen. Wir können den Satz aussprechen:

Sind in der Gleichung (3) außer den Koeffizienten $p_{14}$, $p_{22}$, $p_{33}$, $p_{41}$, $p_{44}$ die übrigen der Null gleich und stellt diese Gleichung eine Berührungstransformation der Kreise in der Ebene dar, so kann es nur entweder eine — eventuell erweiterte — Dilatation oder eine — eventuell erweiterte — Transformation $\mathfrak{Z}$ sein.

## 5. Zurückführung aller Berührungstransformationen der Kreise auf die Dilatation und die Transformation $\mathfrak{Z}$.

Wir wollen jetzt die Gleichung (3) mittels Punkttransformationen, die Kreise in Kreise überführen, auf eine einfachere Form bringen. Dabei behalten die in der Gleichung (3) enthaltenen Berührungstransformationen der Kreise ihre Eigenschaft als solche bei. Zunächst dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $p_{11} \neq 0$ ist. Ist nämlich $p_{11} = 0$ und nicht gleichzeitig $p_{14} = p_{41} = p_{44} = 0$, so können wir eines der Elemente $p_{14}$, $p_{41}$, $p_{44}$, das von Null verschieden ist, durch zulässige Vertauschungen an die Stelle von $p_{11}$ bringen. Ist aber $p_{11} = p_{14} = p_{41} = p_{44} = 0$, so kann man durch eine Verschiebung des Koordinatensystems in einer der beiden Ebenen sofort erreichen, daß wenigstens eines der vier Elemente von Null verschieden ist. Wir betrachten jetzt das Schema

$$(27)\qquad \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{matrix}$$

wobei $p_{11} \neq 0$ ist. Wir wollen nun sowohl in $\Sigma_1$ als auch in $\Sigma_2$ eine Verschiebung des Koordinatensystems vornehmen, indem wir setzen

$$x = x_1 + m, \quad y = y_1 + n, \quad \xi = \xi_1 + \mu, \quad \eta = \eta_1 + \nu.$$

Dann erhalten wir eine neue Berührungstransformation von derselben Art, deren Gleichung durch das folgende Schema gegeben ist:

$$\begin{matrix} p_{11} & p_{12} + \mu p_{11} & p_{13} + \nu p_{11} & \cdots \\ p_{21} + m p_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{31} + n p_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

wobei die 11 nur durch Punkte angedeuteten Elemente Ausdrücke sind, die sich aus $m$, $n$, $\mu$, $\nu$ und den 16 Koeffizienten $p_{ik}$ der Gleichung (3) zusammensetzen, die aber für das Weitere nicht von Bedeutung sind. Die zunächst beliebigen Größen $m, n, \mu, \nu$ erhalten nun die bestimmten Werte

$$m = -\frac{p_{21}}{p_{11}}, \qquad n = -\frac{p_{31}}{p_{11}}, \qquad \mu = -\frac{p_{12}}{p_{11}}, \qquad \nu = -\frac{p_{13}}{p_{11}}.$$

Dann nehmen vier Elemente des Schemas den Wert Null an, und wir erhalten eine Berührungstransformation, deren Gleichung durch das folgende Schema gegeben ist

$$(28)\qquad \begin{matrix} p_{11} & 0 & 0 & p_{14} \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{matrix}$$

wobei außer $p_{11}$ die Elemente $p_{ik}$ natürlich im allgemeinen andere Werte haben wie in dem Schema (27). Wir wollen jetzt von den Fällen absehen, daß in dem Schema (28) entweder $p_{23} = p_{32} = 0$ oder $p_{22} = p_{33} = 0$ ist. Wir nehmen jetzt in $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ je eine Drehung vor und setzen zu diesem Zwecke

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, & \xi &= \xi_1 \cos\psi - \eta_1 \sin\psi, \\ y &= x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi, & \eta &= \xi_1 \sin\psi + \eta_1 \cos\psi. \end{aligned}$$

Dann geht das Schema (28) in ein anderes Schema über, das eine neue Berührungstransformation von derselben Art darstellt:

| $p_{11}$ | 0 | 0 | ... |
|---|---|---|---|
| 0 | $p_{22}\cos\varphi\cos\psi + p_{23}\cos\varphi\sin\psi + p_{32}\sin\varphi\cos\psi + p_{33}\sin\varphi\sin\psi$ | $-p_{22}\cos\varphi\sin\psi + p_{23}\cos\varphi\cos\psi - p_{32}\sin\varphi\sin\psi + p_{33}\sin\varphi\cos\psi$ | ... |
| 0 | $-p_{22}\sin\varphi\cos\psi - p_{23}\sin\varphi\sin\psi + p_{32}\cos\varphi\cos\psi + p_{33}\cos\varphi\sin\psi$ | $p_{22}\sin\varphi\sin\psi - p_{23}\sin\varphi\cos\psi - p_{32}\cos\varphi\sin\psi + p_{33}\cos\varphi\cos\psi$ | ... |
| ... | ... | ... | ... |

Die zunächst beliebigen Winkel $\varphi$ und $\psi$ wählen wir nun so, daß die folgenden beiden Gleichungen erfüllt sind:

$$-p_{22}\cos\varphi\sin\psi + p_{23}\cos\varphi\cos\psi - p_{32}\sin\varphi\sin\psi + p_{33}\sin\varphi\cos\psi = 0,$$
$$-p_{22}\sin\varphi\cos\psi - p_{23}\sin\varphi\sin\psi + p_{32}\cos\varphi\cos\psi + p_{33}\cos\varphi\sin\psi = 0.$$

Durch Addieren und Subtrahieren ergeben sich hieraus die beiden Gleichungen:

$$-p_{22}\sin(\varphi+\psi) + p_{23}\cos(\varphi+\psi) + p_{32}\cos(\varphi+\psi) + p_{33}\sin(\varphi+\psi) = 0,$$
$$-p_{22}\sin(\varphi-\psi) - p_{23}\cos(\varphi-\psi) + p_{32}\cos(\varphi-\psi) - p_{33}\sin(\varphi-\psi) = 0;$$

oder

$$\tan(\varphi+\psi) = \frac{p_{23}+p_{32}}{p_{22}-p_{33}}, \qquad \tan(\varphi-\psi) = \frac{-p_{23}+p_{32}}{p_{22}+p_{33}}.$$

Es kann vorkommen, daß einer dieser beiden Brüche die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Die Fälle, daß $p_{23} = p_{32} = 0$ oder $p_{22} = p_{33} = 0$ ist, waren ausgeschlossen worden. Also kann dies nur eintreten, wenn entweder $p_{23} = p_{32} \neq 0$ und $p_{22} = -p_{33} \neq 0$ oder $p_{23} = -p_{32} \neq 0$ und $p_{22} = p_{33} \neq 0$ ist. In diesem Falle braucht man nur in einer Ebene eine Drehung vorzunehmen, etwa in der $xy$-Ebene; wir setzen also $\psi = 0$, und es verschwindet dann für

$$\tan\varphi = -\frac{p_{23}}{p_{33}} = \frac{p_{32}}{p_{22}}$$

in dem letzten Schema von den vier inneren Elementen sowohl das rechts oben als auch das links unten stehende. Wenn wir diese Drehungen ausgeführt haben, gelangen wir zu einer Berührungstransformation, deren Gleichung gegeben ist durch das Schema

(29)
$$\begin{array}{cccc} p_{11} & 0 & 0 & p_{14} \\ 0 & p_{22} & 0 & p_{24} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{array}$$

Außer $p_{11}$ haben die Elemente im allgemeinen hier wieder andere Werte wie in dem Schema (28). Ist in dem Schema (28) $p_{23} = p_{32} = 0$, so hat es schon die Form (29); ist aber in (28) $p_{22} = p_{33} = 0$, so vertauscht man die zweite mit der dritten Horizontalreihe oder die zweite mit der dritten Vertikalreihe, dann ist ebenfalls die Form (29) erreicht. Wir stellen noch einmal fest, daß auch hier $p_{11} \neq 0$ ist. Man kann den Satz aussprechen:

Jede Berührungstransformation der Kreise in der Ebene kann man mit Hilfe von Verschiebungen und Drehungen in eine ebensolche verwandeln, deren Gleichung die durch das Schema (29) gegebene Form hat, wobei $p_{11} \neq 0$ ist.

Wir wollen nun die Koeffizienten der Gleichung (10) der bizirkularen Kurve wirklich bilden, wenn $p_{12} = p_{21} = p_{13} = p_{31} = p_{23} = p_{32} = 0$ ist. Wir beschränken uns aber zunächst darauf, daß $a = b = 0$ ist. Dann ergibt sich nach (10a) und (10b):

$$\alpha = \frac{-4p_{24}}{cp_{11}-p_{14}}, \qquad \beta = \frac{-4p_{34}}{cp_{11}-p_{14}}, \qquad a_{12} = \frac{4p_{24}p_{34}}{(cp_{11}-p_{14})^2},$$

$$a_{11} = \frac{2c^2 p_{11}p_{41} + 2c(8p_{22}^2 - p_{11}p_{44} - p_{14}p_{41}) + 2(2p_{24}^2 + p_{14}p_{44})}{(cp_{11} - p_{14})^2},$$

$$a_{22} = \frac{2c^2 p_{11}p_{41} + 2c(8p_{33}^2 - p_{11}p_{44} - p_{14}p_{41}) + 2(2p_{34}^2 + p_{14}p_{44})}{(cp_{11} - p_{14})^2},$$

$$a_{13} = \frac{2c(4p_{22}p_{42} - p_{24}p_{41}) + 2p_{24}p_{44}}{(cp_{11} - p_{14})^2},$$

$$a_{23} = \frac{2c(4p_{33}p_{43} - p_{34}p_{41}) + 2p_{34}p_{44}}{(cp_{11} - p_{14})^2}, \qquad a_{33} = \frac{(cp_{41} - p_{44})^2}{(cp_{11} - p_{14})^2}.$$

Die Bedingungen dafür, daß wir eine Berührungstransformation der Kreise vor uns haben, erhalten wir aus den Gleichungen (22). In die zweite von ihnen setzen wir, indem wir den positiven Wert des Ausdruckes $\sqrt{A^2 + B^2}$ wählen, die soeben angegebenen Werte für $a, \ldots a_{33}$ ein und erhalten nach einer etwas längeren Rechnung die Bedingungsgleichung

$$p_{11}\, p_{33}\, p_{43} = 0.$$

Wir haben früher festgestellt, daß man aus jeder Bedingungsgleichung wieder eine solche erhält, wenn man überall $p_{ki}$ an Stelle von $p_{ik}$ setzt, also:

$$p_{11}\, p_{33}\, p_{34} = 0.$$

Vertauscht man in dem Schema (29) die zweite Horizontalreihe mit der dritten und dann die zweite Vertikalreihe mit der dritten, so vertauscht sich $p_{22}$ mit $p_{33}$, $p_{24}$ mit $p_{34}$ und $p_{42}$ mit $p_{43}$. Ist durch das Schema (29) eine Berührungstransformation der Kreise dargestellt, so ist dies nach den genannten Vertauschungen auch der Fall, und wir erhalten daher die beiden weiteren Bedingungen

$$p_{11}\, p_{22}\, p_{42} = 0,$$
$$p_{11}\, p_{22}\, p_{24} = 0.$$

Wählen wir den negativen Wert des Ausdruckes $\sqrt{A^2 + B^2}$, so findet man dieselben vier Bedingungsgleichungen, und zwar die beiden letztgenannten zuerst. Nun ist $p_{11} \neq 0$, und es gibt zunächst 4 Möglichkeiten:

1. $p_{22} = 0, \quad p_{33} = 0,$
2. $p_{22} = 0, \quad p_{34} = 0, \quad p_{43} = 0,$
3. $p_{33} = 0, \quad p_{24} = 0, \quad p_{42} = 0,$
4. $p_{24} = 0, \quad p_{42} = 0, \quad p_{34} = 0, \quad p_{43} = 0.$

Wenn wir aber für beliebige Werte von $a, b, c$ — z. B. für $a = c = 0$, $b$ beliebig und für $b = c = 0$, $a$ beliebig — die Gleichungen (22) aufstellen, so erhalten wir nach einer elementaren, aber recht umfangreichen Rechnung eine größere Zahl von Bedingungsgleichungen, die nur dann gleichzeitig erfüllt sind, wenn $p_{24} = p_{42} = p_{34} = p_{43} = 0$ ist, auch wenn $p_{22}$ oder $p_{33}$ oder beide der Null gleich sind. Wir haben also nur noch das folgende Schema zu untersuchen:

(30)
$$\begin{matrix} p_{11} & 0 & 0 & p_{14} \\ 0 & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 \\ p_{41} & 0 & 0 & p_{44} \end{matrix}$$

Wir müssen nun wieder die Koeffizienten $\alpha, \beta, \ldots a_{33}$ der Gleichung (10) bilden unter der Annahme, daß außer $p_{11}, p_{14}, p_{22}, p_{33}, p_{41}, p_{44}$ die übrigen $p_{ik}$ gleich Null

sind, aber jetzt für allgemeine Werte von $a, b, c$. Dann folgt nach einer wieder etwas längeren Rechnung aus den Gleichungen (22), daß, wenn man $p_{11} \neq 0$ voraussetzt, entweder $p_{14}$ oder $p_{41}$ der Null gleich sein muß [1]). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $p_{41} = 0$ ist, da man ja das Schema (30) an der links oben beginnenden Diagonale spiegeln kann. Die Annahme, daß etwa aus $p_{41} = 0$ wegen zulässiger Vertauschung der Indizes $p_{14} = 0$ folgen würde, wäre hier unrichtig, weil die zu erfüllende Bedingungsgleichung hier lautet $p_{14} \cdot p_{41} = 0$, die durch Vertauschung der Indizes in sich selbst übergeht. Wir wählen also in dem Schema (30) $p_{41} = 0$ und vertauschen noch die erste Horizontalreihe mit der vierten; dann erhalten wir das folgende Schema

$$(31) \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & p_{44} \\ 0 & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 \\ p_{11} & 0 & 0 & p_{14} \end{matrix}$$

Das ist aber genau das Schema (25), das im vorhergehenden Abschnitt untersucht worden ist und das nur die Dilatation und die Transformation $\mathfrak{Z}$ liefert. Es ergibt sich übrigens bei der letzten Untersuchung der Gleichungen (22) für das Schema (30) neben der Bedingung $p_{14}p_{41} = 0$ gleichzeitig die Bedingungsgleichung

$$p_{14}(p_{22}^2 - p_{33}^2) = 0,$$

wenn man $p_{41} = 0$ gewählt hat, durch die die beiden Möglichkeiten, die Dilatation ($p_{22}^2 = p_{33}^2$) und die Transformation $\mathfrak{Z}$ ($p_{14} = 0$) unterschieden werden. Das Ergebnis unserer Untersuchungen läßt sich in den folgenden Satz zusammenfassen:

Jede Berührungstransformation der Kreise in der Ebene ist entweder eine — eventuell erweiterte — Dilatation oder eine — eventuell erweiterte — Transformation $\mathfrak{Z}$.

---

[1]) $p_{44} = 0$ führt nur zu einem speziellen Fall, nämlich der Dilatation.

## Eine Kennzeichnung der Kugel nach *W. Blaschke*.

Von *Kurt Reidemeister* in Königsberg.

Die in Heft 1, Bd. 154, S. 8—14 dieser Zeitschrift veröffentlichte Arbeit ist fehlerhaft. Der in § 3, S. 11 ausgesprochene nach *E. Study* benannte Satz ist nämlich durch ein von Herrn *Hjelmslev* konstruiertes Gegenbeispiel als falsch erwiesen. Der Fehler des Beweises steckt in der — nicht ausführlich begründeten — Behauptung, daß ein Bündel durch 3 seiner Kreise bestimmt sei. Die Kurven $\mathfrak{k}$ sind nur dann mit den ebenen Schnitten einer Eifläche äquivalent, wenn zwei Büschel eines Bündels immer gerade einen Kreis gemeinsam haben.

Es ist somit noch eine offene Frage, ob alle Flächen mit Paaren konjugierter Punkte Kugeln sind.

---

### Ernst Abbe-Gedächtnispreis für Mathematik und Physik.

Der von der Carl Zeiß-Stiftung im Jahre 1921 gelegentlich der Mathematiker- und Physiker-Tagung in Jena begründete Ernst Abbe-Gedächtnis-Preis zur Förderung der mathematischen und physikalischen Wissenschaften und deren Anwendungsgebiete, sowie die damit verbundene Ernst Abbe-Medaille, die 1924 zum ersten Male und zwar für das Gebiet der Mathematik zur Vergebung kommen sollten, sind von der Carl Zeiß-Stiftung dem Professor *Felix Klein* in Göttingen für seine mathematischen Werke zuerkannt worden.

---

Der von Herrn Hofrat Dr. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig errichtete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften“ ist in diesem Jahre durch das Preisgericht Herrn Dr. *Arnold Kohlschütter*, Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam, für seine im Jahre 1914 im „Astrophysical Journal“ Vol. 40 mitgeteilte Entdeckung, die absolute Helligkeit von Sternen aus den Intensitätsverhältnissen gewisser Spektrallinien zu bestimmen, zuerkannt worden.

---